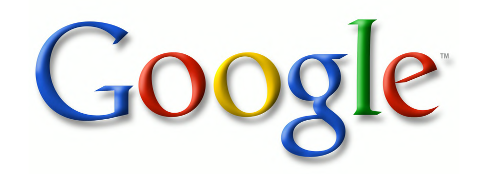
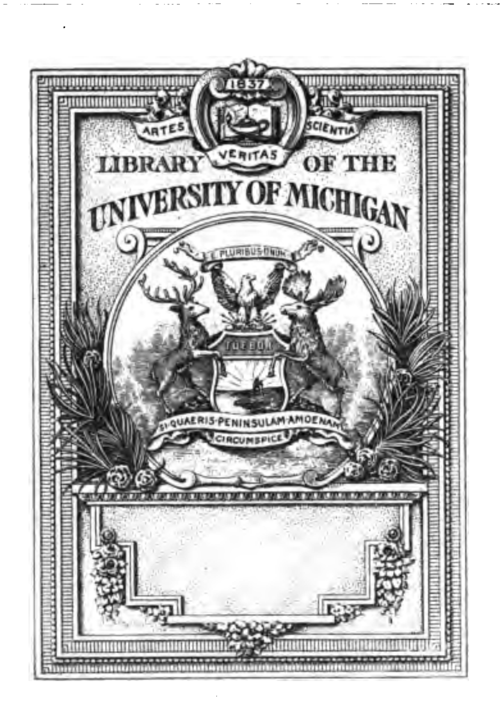



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie de Clermont,

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne.

VAZEILLE
Directeur des études
à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

2e SÉRIE

TOME TROISIÈME



Année 1884.

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1884

COMITÉ DE RÉDACTION

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

EXERCICES SUR LES INÉGALITÉS

M. de Longchamps, dans son Traité d'algèbre (*), a énoncé un certain nombre de questions sur des inégalités à vérifier; nous nous proposons ici de donner la solution de quelques-uns de ces exercices, qui sont la traduction de théorèmes dont on a souvent l'occasion de se servir en mathématiques élémentaires, ou qui présentent, dans la manière de les démontrer, quelque particularité les rendant intéressants; la plus remarquable de ces démonstrations est due, comme nous le dirons plus bas, à l'un des meilleurs analystes du siècle.

1. — *Démontrer que, si* $a_1, a_2, \ldots a_p$ *sont des nombres qui ne sont pas tous égaux, on a*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)^2 < p(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2).$$

On sait que α et β étant deux nombres quelconques différents, on a

$$(\alpha - \beta)^2 > 0.$$

Considérons les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_p$, et faisons les carrés des différences obtenues en retranchant de chacun de ces nombres ceux d'indices plus élevés; nous aurons

$$\Sigma (a_i - a_{i+j})^2 > 0.$$

En effectuant ces carrés, nous trouvons

(*) *Cours de Mathématiques spéciales*, 1re partie, Algèbre, par M. G. de Longchamps. — Paris, librairie Delagrave.

$$(p-1)a_1^2+(p-1)a_2^2+\dots+(p-1)a_p^2-2a_1a_2$$
$$-2a_1a_3\dots-2a_{p-1}a_p>0;$$

ou, en ajoutant de part et d'autre la somme des carrés des nombres donnés, et en faisant passer dans le second membre les termes affectés du signe —, il vient

$$p(a_1^2+a_2^2+\dots+a_p^2)>(a_1+a_2+\dots+a_p)^2.$$

Remarque. — Si tous les nombres $a_1\ a_2 \dots a_p$ étaient égaux, la somme, qui est positive dans le cas ordinaire, deviendrait nulle, et l'inégalité précédente se changerait en égalité.

2. — *Démontrer, avec la même hypothèse sur les nombres* $a_1, a_2, \dots a_p$, *l'inégalité absolue*

$$(a_1+a_2+\dots+a_p)^2$$
$$<p(2a_1^2+2a_2^2+\dots+2a_p^2-a_1a_2-a_2a_3-a_3a_4-\dots-a_pa_1).$$

Je considère les p inégalités suivantes qui sont bien connues

$$x^2+a_1^2+a_2^2-xa_1-xa_2-a_1a_2>0$$
$$x^2+a_2^2+a_3^2-xa_2-xa_3-a_2a_3>0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x^2+a_p^2+a_1^2-xa_p-xa_1-a_pa_1>0.$$

Je les ajoute membre à membre, ce qui donne

$$px^2+2a_1^2+2a_2^2+\dots+2a_p^2-2x(a_1+a_2+\dots+a_p)$$
$$-a_1a_2-a_2a_3-\dots-a_pa_1>0.$$

Je multiplie par p, et j'ajoute au produit, de part et d'autre, l'expression $(a_1+a_2+\dots+a_p)^2$; l'inégalité qui en résulte peut se mettre sous la forme

$$[px-(a_1+a_2+\dots+a_p)]^2$$
$$+p(2a_1^2+2a_2^2+\dots+2a_p-a_1a_2-a_2a_3\dots-a_pa_1)$$
$$>(a_1+a_2+\dots+a_p)^2.$$

Comme les inégalités dont nous sommes partis sont vraies quel que soit x, nous pouvons poser

$$px=a_1+a_2+\dots+a_p;$$

alors l'inégalité se réduit à celle de l'énoncé.

Si les nombres $a_1, a_2, \dots a_p$ étaient tous égaux, l'inégalité changerait encore en égalité.

3. — *Démontrer que l'on a l'inégalité absolue*

$$p\alpha^2 - 2\alpha(a_1 + a_2 + \ldots + a_p - p^2) + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2$$
$$- 2p(a_1 + a_2 + \ldots + a_p) + p^3 > 0.$$

Je vais démontrer que, quelle que soit la valeur que l'on donne à α, le trinôme du second degré en α conserve toujours le même signe, qui est ici le signe $+$, puisque p est un nombre entier et positif.

En effet, dans ce cas, la quantité sous le radical est

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_p - p^2)^2 - p(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2)$$
$$+ 2p^2(a_1 + a_2 + \ldots + a_p) - p^4;$$

cette expression se réduit à

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_p)^2 - p(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p),$$

et l'on sait, d'après l'exercice (1), que cette quantité est négative. C'est la condition nécessaire et suffisante pour que le trinôme conserve son signe.

On peut aussi mettre l'expression sous une forme qui rende évidente l'inégalité proposée; en effet, on peut grouper les termes de la façon suivante :

$$a_1^2 - 2pa_1 + p^2 - 2\alpha(a_1 - p) + \alpha^2$$

et d'autres termes analogues. Sous cette forme, on voit que l'expression est la somme de termes de la forme

$$(a_1 - p - \alpha)^2,$$

et il est évident que l'on a

$$\Sigma\,(a_1 - p - \alpha)^2 > 0.$$

4. — *Vérifier que les deux égalités*

$$(q - q')^2 - (p' - p)(pq' - qp') = 0$$
$$p(p' - p) - 2(q' - q) = 0$$

entraînent nécessairement : ou $p = p'$, *et par suite* $q = q'$, *ou* $p^2 - 4q = 0$, *si* $p - p'$ *est différent de zéro.*

Je remarque que si je supposais, à priori, $p' - p = 0$, les deux inégalités exigeraient, pour être vérifiées, que l'on eût $q - q' = 0$. Je vais prouver que les deux seules hypothèses possibles sont bien celles indiquées par l'énoncé.

Pour cela, j'écris la seconde inégalité de la façon suivante, en retranchant $4q$ de part et d'autre:

$$pp' - 2(q + q') = p^2 - 4q. \qquad (1)$$

D'autre part, les deux égalités proposées donnent, en

supposant $p - p'$ différent de zéro,

$$\frac{q' - q}{p' - p} = \frac{p}{2}, \quad \text{et} \quad \frac{q' - q}{p' - p} = \frac{pq' - qp'}{q' - q}.$$

On en tire

$$p(q' - q) - 2(pq' - qp') = 0$$

ou

$$2p(q + q') = 4p'q. \qquad (2)$$

Cela posé, je multiplie les deux membres de l'égalité (1) par p ; j'obtiens

$$p^2p' - 2p(q + q') = p^3 - 4pq,$$

ou, d'après l'égalité (2),

$$(p' - p)(p^2 - 4q) = 0.$$

On ne peut satisfaire à cette égalité qu'en posant

$$p' - p = 0$$

ou

$$p^2 - 4q = 0.$$

5. — *Démontrer que si* a, b, c, ... k, l, *représentent des quantités qui ne sont pas toutes égales, et qui sont supposées en nombre* p, *on a*

$$\sqrt[p]{\mathrm{abc \ldots kl}} < \frac{\mathrm{a + b + c + \ldots + k + l}}{\mathrm{p}}.$$

(Cauchy.)

On sait que l'on a identiquement

$$ab = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2,$$

et par suite

$$ab < \left(\frac{a + b}{2}\right)^2;$$

donc, si $p = 2$, on a

$$\sqrt{ab} < \frac{a + b}{2}.$$

En second lieu, on a, pour quatre nombres a, b, c, d, la relation

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}$$

et par suite

$$\sqrt[4]{abcd} < \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} < \frac{\frac{a + b}{2} + \frac{c + d}{2}}{2};$$

donc

$$\sqrt[4]{abcd} < \frac{a+b+c+d}{4}.$$

De la même manière, on démontrerait que l'on a

$$\sqrt[8]{abcdefgh} = \sqrt{\sqrt[4]{abcd}\sqrt[4]{efgh}},$$

et par suite que le théorème est vrai pour huit nombres; en général, on trouverait qu'il est vrai quand on a 2^k nombres.

Cela posé, pour démontrer que le théorème est général, Cauchy, au lieu de démontrer que, en le supposant vrai pour p quantités, il est vrai pour $p+1$ quantités, démontre au contraire que, en supposant ce théorème établi pour $p+1$ quantités, on peut l'établir pour p quantités.

On a identiquement

$$\sqrt[p]{abc \ldots kl} = \sqrt[p+1]{abc \ldots kl \sqrt[p]{abc \ldots kl}};$$

or, par hypothèse, puisque le théorème est établi pour $p+1$ quantités, on a

$$\sqrt[p+1]{abc \ldots kl \sqrt[p]{abc \ldots kl}} < \frac{a+b+c \ldots + k + l + \sqrt[p]{abc \ldots kl}}{p+1}$$

Donc on a, après réduction,

$$p\sqrt[p]{abc \ldots kl} < a+b+c+ \ldots + k + l;$$

on en tire facilement la généralisation indiquée par Cauchy.

Remarque. — La racine d'ordre p du produit de p nombres s'appelle quelquefois la *moyenne géométrique* de ces nombres. Le théorème de Cauchy peut, en adoptant cette expression, s'énoncer ainsi : *la moyenne géométrique de* p *nombres est toujours inférieure à leur moyenne arithmétique.* (*A suivre.*)

SUR LA MOYENNE HARMONIQUE;

Par M. G. de Longchamps.

1. — On sait que Mac-Laurin (*) a nommé *moyenne harmonique* entre plusieurs valeurs données, x_1, x_2, ... x_p, celle

---

(*) Mac-Laurin, *Traité des courbes géométriques*, § 28.

dont la valeur inverse est *moyenne arithmétique* entre les valeurs inverses de ces quantités.

Si l'on suppose que sur une droite indéfinie Δ, et à partir d'une certaine origine O, on porte des longueurs

$$OA_1 = x_1,\ OA_2, = x_2,\ \ldots\ OA_p = x_p,$$

et, finalement, une longueur

$$OA = x,$$

vérifiant l'égalité

$$\frac{p}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_p},$$

x est la moyenne harmonique, et le point A ainsi obtenu a été nommé par Poncelet (*) le *centre des moyennes harmoniques*. Ce point est aussi appelé, quelquefois, *conjugué harmonique du premier ordre* relativement au point O.

Nous nous proposons, ces définitions étant rappelées, d'indiquer ici comment on peut, par une construction rapide, et en supposant p assez considérable, construire la moyenne harmonique.

2. — Nous rappellerons d'abord la construction qu'on applique ordinairement au problème en question.

Sur A_1A_2 comme diamètre on décrit un demi-cercle, et du point O on mène à ce cercle une tangente; soit α_1 la projection du point de contact obtenu, sur Δ. On sait que l'on a

$$\frac{2}{O\alpha_1} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2}.$$

Si l'on prend le point O_1 milieu de $O\alpha_1$, on aura donc

$$\frac{1}{OO_1} = \frac{1}{O_1\alpha_1} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OA_2}.$$

En répétant la construction précédente pour les trois points O, O_1 et A_3 on trouvera, de même, un point O_2, tel que

$$\frac{1}{OO_2} = \frac{1}{OO_1} + \frac{1}{OA_3}.$$

On a donc

(*) Poncelet, *Mémoire sur le centre des moyennes harmoniques*; Journal de Crelle, t. III.

Voyez aussi Chasles, *Aperçu historique*, p. 147.

$$\frac{1}{OO_2} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \frac{1}{OA_3};$$

et ainsi de suite.

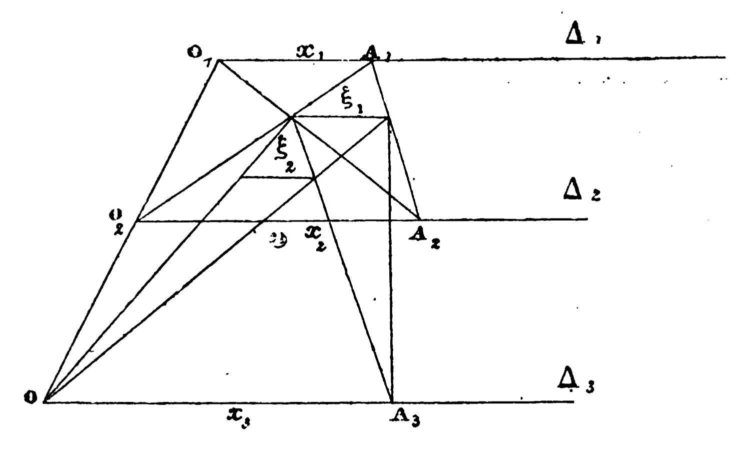
On trouvera donc facilement un point O_{p-1} tel que l'on ait

$$\frac{1}{OO_{p-1}} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \ldots + \frac{1}{OA_p}.$$

En portant, à partir de O, une longueur égale à $p.\ OO_{p-1}$, on aura le centre des moyennes harmoniques.

Si l'on réfléchit à la somme de lignes que nécessite la construction précédente, on reconnaîtra qu'elle ne laisse pas que de présenter quelque complication quand on suppose p assez considérable. Si nous ne nous trompons, les constructions que nous allons maintenant indiquer offrent, sur la précédente, un avantage sensible.

3. — La première des deux constructions dont nous voulons parler repose sur ce théorème connu : *Si l'on désigne par* a *et* b *les bases d'un trapèze et par* 2x *la longueur de la*



parallèle à ces bases menée par le point de concours des diagonales : 1° ce point est situé au milieu de cette parallèle ; 2° on a

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$OA_1 = x_1,\ OA_2 = x_2, \dots\ OA_p = x_p$$

et sur des droites parallèles $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_p$, portons, à partir d'origines arbitrairement choisies,

$$O_1A_1 = x_1,\ O_2A_2 = x_2,\ O_3A_3 = x_3;\ \dots;$$

En faisant la construction qu'indique la figure, on a

$$\frac{1}{\xi_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

puis

$$\frac{1}{\xi_2} = \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{x_3};$$

par conséquent,

$$\frac{1}{\xi_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3},$$

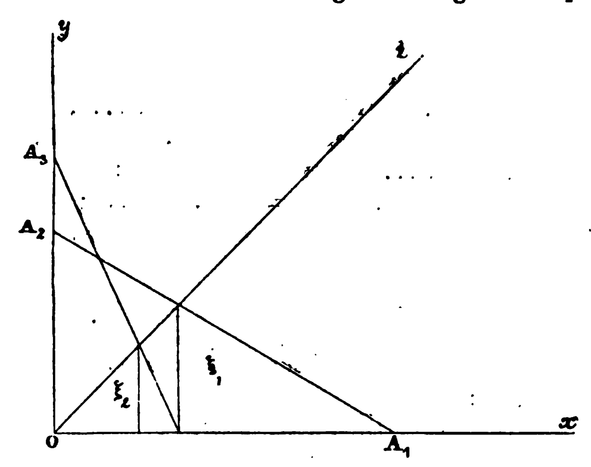
et ainsi de suite.

4. — Cette construction nous paraît particulièrement avantageuse parce qu'elle ne nécessite que l'usage de la règle.

A ce propos on peut remarquer que dans la construction indiquée au paragraphe précédent, le point que nous avons nommé α_1, n'étant autre chose que le conjugué harmonique de O par rapport au segment A_1A_2, on peut, par une construction connue, le déterminer en se servant seulement de la règle. Il faut ensuite, conformément à ce que nous avons dit, prendre le milieu de $O\alpha_1$; cette construction peut encore se faire avec la règle seule ; il suffit, à cet effet, de tracer un parallélogramme dont $O\alpha_1$ est une diagonale ; l'autre diagonale passe par le point cherché. Mais cette variété de la première construction exige, comme on le reconnaît sans peine, un nombre de lignes droites bien supérieur à celui des droites que nous employons dans la seconde construction.

5. — Enfin, la moyenne harmonique peut encore se construire, très simplement, en prenant pour base le théorème élémentaire suivant : *L'inverse de la distance du pied de la bissectrice de l'angle droit d'un triangle rectangle* AOB *au côté* OA *ou* OB *de ce triangle, est égale à* $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$.

Prenons un angle droit yOx et soit Oz la bissectrice; ayant porté sur l'un des côtés de cet angle la longueur $OA_1 = x_1$,



puis, sur l'autre côté, les longueurs : $OA_2 = x_2$, $OA_3 = x_3$ ..., nous avons d'abord :

$$\frac{1}{\xi_1} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2},$$

puis

$$\frac{1}{\xi_2} = \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{OA_3},$$

d'où

$$\frac{1}{\xi_3} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \frac{1}{OA_3},$$

et ainsi de suite.

6. — En terminant cette petite note, nous dirons quelques mots d'une question que l'on rattache habituellement à la précédente; nous voulons parler de la construction de la *moyenne harmonique de carrés.*

Soit x_1, x_2, ... x_p des longueurs données en nombre p, on dit qu'une ligne x est une moyenne harmonique de carrés par rapport à ces longueurs, lorsque l'égalité

$$\frac{p}{x^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_p}$$

est vérifiée.

On sait comment on ramène la construction de la longueur x, définie par cette égalité, à celle de la moyenne harmonique qui vient de nous occuper.

Sur une ligne OP (dont la longueur est arbitraire) comme diamètre, on décrit un demi-cercle Δ, et on prend des cordes :

$$OA_1 = x_1, \quad OA_2 = x_2, \; OA_3 = x_3, \; \ldots,$$

puis, l'on projette les points A_1, A_2, A_3, ... sur OP.

Soient a_1, a_2, a_3, ... ces projections ; on a :

$$x_1^2 = Oa_1 \cdot OP, x_2^2 = Oa_2 \;.\; OP, \ldots;$$

Soit a le centre des moyennes harmoniques des points a_1, a_2, a_3, ..., on a

$$\frac{p}{Oa} = \frac{1}{Oa_1} + \frac{1}{Oa_2} + \frac{1}{Oa_3} + \ldots$$

Soit A le point qui est situé sur Δ et qui a pour projection a, on peut écrire :

$$\overline{OA}^2 = OP \;.\; Oa,$$

et, par suite,

$$\frac{p \;.OP}{\overline{OA}^2} = \frac{OP}{x_1^2} + \frac{OP}{x_2^2} + \ldots$$

ou

$$\frac{p}{\overline{OA}^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots$$

Mais on peut aussi, et c'est la remarque que nous voulions faire, construire directement, et beaucoup plus simplement, la moyenne harmonique de carrés en s'appuyant sur cette propriété bien connue : *l'inverse du carré de la hauteur d'un triangle rectangle est égale à la somme des carrés des inverses de côtés de l'angle droit.*

D'après cela, ayant pris sur le côté Ox de l'angle droit yOx, $OA_1 = x_1$, puis sur Oy :

$$OA_2 = x_2, \qquad OA_3 = x_3, \ldots;$$

la longueur ζ_1 de la perpendiculaire abaissée de O sur A_1A_2, vérifie l'égalité

$$\frac{1}{\zeta_1^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}.$$

En rabattant ζ_1 sur Ox et en joignant le point ainsi obtenu à A_3, ζ_2 désignant la distance de O à cette droite,

$$\frac{1}{\zeta_2^2} = \frac{1}{\zeta_1^2} + \frac{1}{x_3^2},$$

et par suite

$$\frac{1}{\zeta_2^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2};$$

et ainsi de suite, on trouve ainsi, par une construction très rapide, une ligne ζ telle que l'on ait

$$\frac{1}{\zeta^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_p^2}.$$

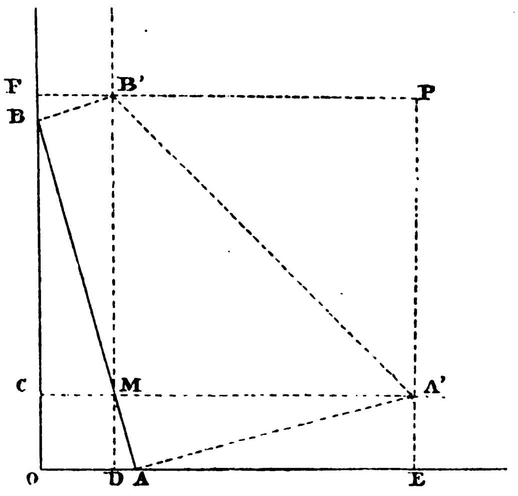
La ligne cherchée x s'obtient facilement quand on connaît ζ, puisque l'on a

$$\frac{x^2}{\zeta^2} = \frac{p}{1}.$$

NOTE SUR LE PROBLÈME DE PAPPUS

Par M. J. Charrion, élève de mathématiques au Lycée Saint-Louis
(Classe de M. Ed. Lucas).

Tracer une droite de longueur donnée AB *passant par un point* M *de la bissectrice d'un angle droit* AOB.



J'appelle A′ et B′ les points de rencontre des parallèles à OA et OB menées par M avec les perpendiculaires en A et B à AB, C et D leurs intersections avec les côtés de l'angle droit.

Les deux trian-

gles MAA′, MBB′ sont égaux, puisqu'ils ont les côtés perpendiculaires et que les distances des points A et B aux bases MA′ et AB′ sont égales.

Donc surface trapèze AA′BB′ $= \dfrac{AA'+BB'}{2} \times AB = \dfrac{1}{2} AB^2$.

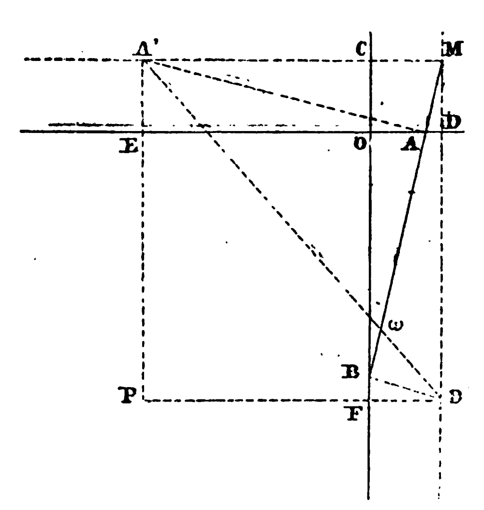
Menons par A′ et B′ les parallèles PE et PF aux côtés de l'angle droit :

$$DEMA' = 2MAA';\ MA'PB' = 2MA'B';$$

donc surface carrée OEPF $= 2AA'BB' + OCMD = AB^2 + OD^2$.

On sait donc construire ce carré, ce qui permet de déterminer les points A′ et B′ et par suite A et B qui sont respectivement sur les circonférences de diamètre MA′ et MB′.

Si la droite AB est dans l'angle formé par une des droites et le prolongement de l'autre, la solution est identique, à condition de désigner par AA′BB′ l'expression ωAA′ — ωBB′, ω étant le point d'intersection des droites AB et A′B′ (*fig. 2*).



Remarque. — Si on se propose de trouver une droite telle que MA + MB soit donné, le problème est celui du premier cas ou s'y ramène immédiatement.

En effet, si les points A et B se trouvent l'un sur l'un des côtés, l'autre sur le prolongement de l'autre (*fig. 3*), en menant MA′B′ perpendiculaire à AB, on a MA′ = MB, MB′ = MA.

Si MA — MB est donné, le problème se ramène au deuxième cas traité.

SUR LE PROBLÈME DE PELL

Par M. G. de Longchamps.

1. — Le problème de *Pell* est celui qui se propose la résolution en nombres entiers de l'équation

$$x^2 - ay^2 = 1. \quad (a \text{ entier}) \qquad (1)$$

Ce problème célèbre a occupé un grand nombre de géomètres, et il ne sera peut-être pas sans intérêt d'indiquer ici quelques-unes des sources que l'on peut consulter sur cette intéressante et délicate question.

Voici comment *Gauss* (*) s'exprime à ce sujet :

« La résolution de l'équation (1) a déjà été traitée par les géomètres du siècle dernier. *Fermat* avait proposé ce problème aux analystes anglais, et *Wallis* (**) rapporte une solution qu'il attribue à *Brounker*. De son côté, *Ozanam* prétend qu'elle est de *Fermat* ; enfin, *Euler* (***), qui s'en est occupé, dit que *Pellius* l'a trouvée le premier, ce qui a fait donner par quelques-uns à ce problème le nom de Pellien. »

C'est à *Lagrange* (****) qu'est due la première solution rigoureuse du problème de *Pell* : car, comme l'ont fait remarquer *Lagrange* et *Gauss*, la démonstration proposée par *Wallis* n'est pas exacte.

2. — Au problème de *Pell* on peut adjoindre celui qui a pour but la résolution en nombres entiers de l'équation

$$x^2 - ay^2 = -1. \quad (a \text{ entier}) \qquad (2)$$

Lagrange a fait remarquer que la résolution de cette équation pouvait se ramener à celle de l'équation de *Pell* et voici comment on peut établir ce fait remarquable.

(*) *Recherches arithmétiques*, par M. Ch. Fr. Gauss (de Brunswick), traduites par A. C. M. Poullet-Delisle. Paris, 1807 (p. 195).

(**) Wallis, *Algèbre*, chap. 98, t. II de ses œuvres, p. 418.

(***) L. Euler, *Introduction à l'algèbre*. Saint-Pétersbourg, 1770, 2 vol. in-8°.

(****) *Mélanges de la Société de Turin*, t. IV, p. 19. — *Histoire de l'Académie de Berlin*, 1767, p. 237. — *Suppléments à l'Algèbre d'Euler*. — *Éléments d'algèbre d'Euler*, 1774, t. II, p. 624.

Le nombre $x^2 + ay^2$ est entier; posons donc

$$x^2 + ay^2 = \alpha. \quad (\alpha \text{ entier}) \qquad (3)$$

Les équations (2) et (3) donnent alors, par combinaison,

$$2x^2 = \alpha - 1,$$
$$2ay^2 = \alpha + 1$$

et, par suite,

$$4ax^2y^2 = \alpha^2 - 1.$$

Cette dernière relation écrite sous la forme

$$\alpha^2 - a(2xy)^2 = 1$$

est une équation de *Pell*, et en posant

$$2xy = \beta,$$

on voit que si l'on sait résoudre l'équation

$$\alpha^2 - a\beta^2 = 1,$$

on obtiendra les inconnues x et y au moyen des relations :

$$x^2 - ay^2 = -1,$$
$$x^2 + ay^2 = \alpha,$$
$$2xy = \beta,$$

qui sont compatibles si α et β représentent, comme nous le supposons, une solution de l'équation de *Pell*. Dans le cas où les équations précédentes admettent une solution entière, la résolution de l'équation (2) se trouve effectuée; sinon on peut affirmer qu'il n'existe aucune solution entière du problème proposé.

3. — Nous nous occuperons seulement, dans cette petite note, du cas où l'on suppose $a = 2$, cas particulier qui se rencontre dans plusieurs questions, et nous montrerons que les équations :

$$x^2 - 2y^2 = 1, \qquad (A)$$
$$x^2 - 2y^2 = -1; \qquad (B)$$

admettent une infinité de solutions entières.

La première partie a déjà été démontrée (*), et nous nous occuperons seulement de l'équation (B) que nous allons résoudre directement, sans la rattacher à l'équation de *Pell*.

A cet effet, considérons l'identité

$$2(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - 2ab - b^2)^2 + (a^2 + 2ab - b^2)^2 \quad (C)$$

(*) Voyez : J. 1882, p. 193; et J. 1883, p. 145.

et disposons des indéterminées a et b de façon que l'on ait

$$a^2 - 2ab - b^2 = 1.$$

On tire de là

$$a = b \pm \sqrt{2b^2 - 1}.$$

Posons maintenant

$$2b^2 - 1 = u^2.$$

On peut trouver pour b et pour u des valeurs entières vérifiant cette relation, si l'on sait déterminer une solution entière de l'équation (B). Soit x' y' cette solution, on a donc

$$u = x', \quad b = y'$$

et, par suite,

$$a = y' \pm x'.$$

D'ailleurs, pour les valeurs de a et de b, l'égalité (C) devient

$$2(a^2 + b^2)^2 = 1 + (a^2 + 2ab - b^2)^2$$

et l'équation (B) admet une solution nouvelle :

$$x = a^2 + b^2, \qquad y = a^2 + 2ab - b^2.$$

Généralement, cette solution est double, puisque a admet deux valeurs.

Ainsi, la connaissance d'une seule solution entière de l'équation (B) entraîne celle d'une infinité d'autres solutions qui se déduisent successivement les unes des autres, par une sorte de calcul récurrent.

Or l'équation (B) admet la solution évidente

$$y_0 = 1, \qquad x_0 = 1,$$

on déduit de celle-ci les suivantes :

$$y_1 = 5, \qquad x_1 = 7,$$
$$y_2 = 169, \qquad x_2 = 239,$$
$$\ldots \qquad \ldots$$

4. — Cette solution (x_2, y_2), si l'on remarque que $169 = 13^2$, appelle l'attention sur l'équation biquadratique

$$x^2 + 1 = 2y^4, \qquad \text{(D)}$$

qui, outre la solution évidente $x' = 1$, $y' = 1$, admet aussi, d'après la remarque en question, la solution

$$x'' = 239, \qquad y'' = 13.$$

Du reste, l'équation (2) se rattache aussi à l'équation de *Pell*, de la manière suivante.

Posons, par une transformation naturelle,

$$x = y^2 + X;$$

nous avons entre les inconnues y et X la relation

$$y^4 - 2y^2X - X^2 - 1 = 0.$$

On en tire

$$y^2 = X \pm \sqrt{2X^2 + 1}.$$

En posant alors

$$2X^2 + 1 = U^2,$$

on a à résoudre une équation de *Pell*; et les inconnues x, y sont données par les formules :

$$x = 2X + U,$$
$$y^2 = X + U.$$

5. — La transformation que nous venons d'indiquer est bien propre à mettre en lumière cette sorte de dualité qui lie les équations (A) et (B), et en vertu de laquelle la résolution de l'une peut se faire quand on connaît une solution de l'autre.

Considérons, en effet, l'équation (B) et posons

$$x = y + X.$$

Nous avons alors, entre y et X, la relation

$$y^2 - 2Xy - X^2 - 1 = 0;$$

d'où,

$$y = X \pm \sqrt{2X^2 + 1}.$$

Ainsi, connaissant une solution de l'équation

$$2X^2 + 1 = t^2,$$

on aura immédiatement une solution de l'équation (B); on peut même dire que l'on aura deux solutions, parce que y a deux valeurs, l'une positive, l'autre négative; et parce que l'on peut prendre cette dernière, en changeant son signe.

6. — En terminant cette note qui, comme celles que nous avons rappelées plus haut et que nous avons publiées dans ce journal, a surtout pour but d'appeler l'attention et l'intérêt de quelques-uns de ses lecteurs sur *l'application élémentaire des identités à l'analyse indéterminée*, nous compléterons les renseignements que nous avons donnés sur le problème de *Pell*.

Cette intéressante question a fait récemment l'objet d'un

travail de M. *Brocard* (*), qui a terminé sa note par quelques indications bibliographiques que nous demandons la permission de reproduire ici, parce qu'elles pourront être utiles à ceux qui voudraient pénétrer plus avant dans cette question dont l'intérêt est loin d'être épuisé, même après ce qu'en a dit *Lagrange*.

Voici ces indications :

C. Richaud. *Sur l'équation* $X^2 - NY^2 = -1$. (*Journal de Mathématiques* de Liouville, t. IX 1864 ; t. X et t. XI).

S. Gunther. *Résolution de l'équation indéterminée* $y^2 - ax^2 = bz$, *en nombres entiers*. (*Ibid*. 1876.)

S. Gunther. *Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung*. 1876. Erlangen.

Ce dernier travail, comme l'indique son titre, est surtout historique. M. *S. Günther* reporte aux Hindous l'honneur d'avoir poussé plus loin que *Diophante*, l'étude de l'analyse indéterminée et notamment d'avoir résolu l'équation

$$x^2 - ay^2 = 1,$$

par une méthode qui, d'après *Hankel*, n'est autre chose que celle que *Lagrange* a exposée en 1769 et à laquelle nous avons fait allusion plus haut.

Desboves. *Mémoire sur la résolution en nombres entiers de l'équation*

$$aX^m + bY^m = cZ^n.$$

(*Nouvelles Annales* 1879; p. 265).

Realis. *Sur quelques questions se rattachant au problème de Pell*. (*Nouvelle Correspondance mathématique*, 1880, p. 306.)

(*) *Nouvelle correspondance mathématique*, 1878, p. 161, 193, 228, 337

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir 1883, p. 265.)

XVI

Dans le triangle ABC *on a pris le point* C′ *sur* AB *et* B′ *sur* AC, *tels que l'angle* C′CB *soit égal à* $\frac{C}{m}$ *et que l'angle* B′BC *soit égal à* $\frac{B}{m}$. *Démontrer que si* CC′ = BB′, *le triangle* ABC *est isoscèle.*

Je suppose m positif et plus grand que l'unité; B′ et C′ sont alors respectivement entre A et C et entre A et B.

Supposons que B ne soit pas égal à C, et soit alors B > C, on a

$$\text{angle BB'A} = \left(C + \frac{B}{m}\right) = \left(B + C - \frac{m-1}{m} B\right)$$

$$\text{angle CC'A} = \left(B + \frac{C}{m}\right) = \left(B + C - \frac{m-1}{m} C\right)$$

d'où, puisque B > C,

$$\text{angle BB'A} < \text{angle CC'A}$$

et par suite

$$\text{angle CB'B} > \text{angle BC'C}.$$

Sur BC je décris un segment capable de CB′B, il coupe CC′ en un point C_1 qui est situé entre C et C′, puisque l'angle BC′C étant plus petit que CB′B, le point C′ se trouve à l'extérieur de ce segment capable.

Mais B > C donne

$$\frac{B}{m} > \frac{C}{m} \text{ ou } B'BC > C_1CB,$$

par suite

$$\text{arc } CB' > \text{arc } BC_1$$

ou en ajoutant l'arc $B'C_1$

$$\text{arc } CB'C_1 > \text{arc } BC_1B',$$

et comme il s'agit d'arcs plus petits qu'une demi-circonférence

$$\text{corde } CC_1 > \text{corde } BB'$$

et à fortiori

$$CC' > BB',$$

ce qui est contre l'hypothèse.

B ne peut donc être plus grand que C ; on démontrerait de même qu'il ne peut être plus petit; donc on a $B = C$ et le triangle ABC est isoscèle.

Une démonstration analogue s'applique au cas où m est négatif, mais plus grand que 1 en valeur absolue.

Dans le cas où la valeur absolue de m est plus petite que l'unité, que m soit positif ou négatif, le théorème n'est plus exact.

La démonstration géométrique qui précède m'a été donnée par M. Moret-Blanc; j'avais posé la question dans les *Nouvelles Annales;* M. Goffart en a publié dans le numéro de novembre 1883 une solution par la trigonométrie.

XVII

Soit un triangle ABC.

Sur CB *prolongé et dans le sens* CB *on a pris* A' *tel que* $BA' = m.CB$
Sur AC — AC — B' — $CB' = p.AC$
Sur BA — BA — C' — $AC' = q.BA$

On connait les trois points A', B', C', *et les rapports* m, p, q. *Trouver* ABC.

Soit

$$l_a = B'C', \quad l_b = A'C', \quad l_c = A'B' ;$$

les trois triangles B'AC', A'BC', A'CB' donnent

$$l_a^2 = q^2c^2 + (p+1)^2b^2 + 2q(p+1)bc \cos A$$
$$l_b^2 = (q+1)^2c^2 + m^2c^2 + 2m(q+1)ac \cos B$$
$$l_c^2 = (m+1)^2a^2 + p^2b^2 + 2p(m+1)ab \cos C$$

ou en remplaçant cos A, cos B, cos C par leurs valeurs en fonction de a, b, c, on a

$$-a^2q(p+1) + b^2(p+1)(p+q+1) + c^2q(p+q+1) = l_a^2$$
$$a^2m(m+q+1) - b^2m(q+1) + c^2(q+1)(m+q+1) = l_b^2$$
$$a^2(m+1)(p+m+1) + b^2p(p+m+1) - c^2p(m+1) = l_c^2$$

On tire de là :

$$a^2 = \frac{\begin{vmatrix} l_a^2, & (p+1)(p+q+1), & q(p+q+1) \\ l_b^2, & -m(q+1), & (q+1)(m+q+1) \\ l_c^2, & p(p+m+1), & -p(m+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -q(p+1), & (p+1)(p+q+1), & q(p+q+1) \\ m(m+q+1), & -m(q+1), & (q+1)(m+q+1) \\ (m+1)(p+m+1), & p(p+m\,1), & -p(m+1) \end{vmatrix}}$$

etc.

Les élèves, en donnant à m, p, q des valeurs particulières, peuvent s'exercer à déduire de ces formules des théorèmes particuliers.

Ainsi, si $m = p = q$, les triangles ABC, A'B'C' ont même centre de gravité· Si $m = p = q = 1$, on a

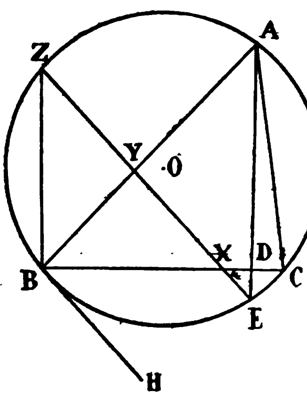
$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{7}(l_a^2 + l_b^2 + l_c^2).$$

(A suivre.)

QUESTION 96

Solution par M. Aubry, élève au Lycée de Douai.

On considère un triangle ABC *inscrit dans un cercle; la hauteur* CD *menée sur* AB *rencontre le cercle au point* E. *On demande de mener par le point* E *une corde* EZ, *rencontrant* AB *en* X, BC *en* Y *et la circonférence en* Z *de façon que* XY = YZ. (R.)



Prenons pour inconnue l'angle EXC = α.

Si nous tirons BZ et que par le point B nous menions la parallèle BH à ZE, le faisceau (B. HYXZ) sera harmonique.

Mais on sait que le rapport anharmonique de ce faisceau est exprimé par

$$\frac{\sin \text{DBH}}{\sin \text{DBA}} : \frac{\sin \text{ZBH}}{\sin \text{ZBA}}$$

Nous aurons donc, en faisant abstraction du signe

$$\frac{\sin DBH}{\sin DBA} \times \frac{\sin ZBA}{\sin ZBH} = 1$$

ou, puisque $DBH = \alpha$, $DBA = B$,

$$ZBA = ZEA = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad ZBH = \frac{\pi}{2} + B$$

$$\frac{\sin \alpha . \cos \alpha}{\sin B \cos \left(\frac{\pi}{2} - B\right)} = 1$$

c'est-à-dire $\sin 2\alpha = \sin 2B$.

On en déduit, en ne prenant que les valeurs inférieures à π,

$$\alpha = B \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - B.$$

Il y a donc deux solutions que l'on construira facilement; pour $\alpha = \frac{\pi}{2} - B$, EX est perpendiculaire à BA; si $\alpha = B$, l'angle AEY est égal à l'angle EAB; par suite, le point Y se trouve sur la perpendiculaire à AE menée par le centre O de la circonférence.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Naura, à Vitry-le-François; Porée, à Bernay; Caitucoli, à Draguignan; Youssoufian, à Constantinople. Toutes ces solutions présentent le défaut de n'avoir donné que la première solution, celle qui correspond à $\alpha = \frac{\pi}{2} - B$.

QUESTIONS PROPOSEES

126. — Étant donnés deux cercles tangents entre eux au point A, on mène de ce point une transversale qui coupe le premier cercle au point B, le second au point B′. On joint le point B du premier cercle au centre O′ du second et le point B′ du second cercle au centre O du premier. Les deux droites BO′, B′O se rencontrent en un point M dont on demande le lieu lorsque la transversale ABB′ prend toutes les positions possibles autour du point A. — Discussion. — Signa-

ler les propriétés du triangle BB'M. — Étant donné l'angle Θ que fait la transversale ABB' avec la ligne des centres dans une de ses positions, ainsi que les rayons R et R' des deux cercles, trouver les trois côtés du triangle BB'M en fonction de ces données. *(Aix, Conc. acad. 1867.)*

127. — On considère un trapèze ABCD, dans lequel les diagonales AC, BD, se coupent orthogonalement au point P. Soit pris le point P', symétrique de P par rapport à la parallèle équidistante des bases. Démontrer que les cercles P'AB, P'CD sont tangents. *(G. L.)*

128. — Si l'équation $x^2 - px + q = 0$ admet deux racines entières et positives :

1° L'expression

$$\frac{q(q+p+1)(4q+2p+1)}{36}$$

représente un nombre entier décomposable en une somme de q carrés;

2° L'expression

$$\frac{q^2(q+p+1)^2}{16}$$

représente un nombre entier décomposable en une somme de q cubes;

3° Le nombre $q^2(4q+2p+1)$ est décomposable en une somme algébrique de $4q$ carrés. *(Laisant.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 378-4.

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Emile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 20.)

XVIII

Soit un triangle ABC :

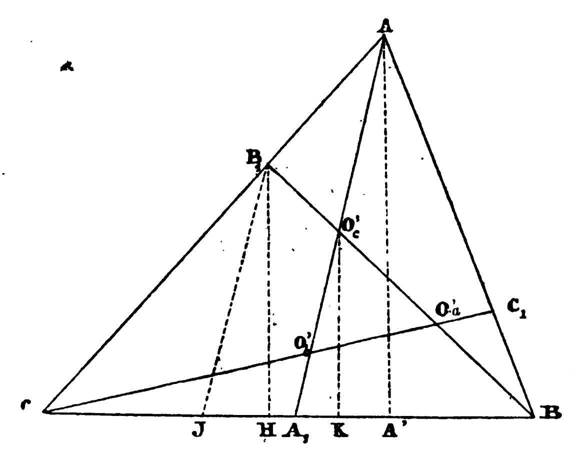
Je divise

BC *en* A_1, A_2, A_3 *de façon que* $\frac{CA_1}{CB} = m$, $\frac{CA_2}{CB} = n$, $\frac{CA_3}{CB} = p$

CA *en* B_1, B_2, B_3 — $\frac{AB_1}{AC} = n$, $\frac{AB_2}{AC} = p$, $\frac{AB_3}{AC} = m$

AB *en* C_1, C_2, C_3, — $\frac{BC_1}{AB} = p$, $\frac{BC_2}{AB} = m$, $\frac{BC_3}{AB} = n$

Démontrer que le triangle $O'_aO'_bO'_c$ *formé par les lignes* AA_1, BB_1, CC_1 *est équivalent au triangle formé par les lignes* AA_2, BB_2, CC_2, *et au triangle formé par les lignes* AA_3, BB_3, CC_3.



Si l'on remarque que, à cause de la symétrie de la figure, le théorème est évident pour le triangle équilatéral, on a une démonstration immédiate de la question en regardant le triangle donné comme la projection d'un certain triangle

équilatéral de l'espace; nous allons en donner une démonstration directe, en ne considérant que des lignes du plan.

Soit O'_a l'intersection de BB_1 et de CC_1

— O'_b — CC_1 — AA_1

— O'_c — AA_1 — BB_1;

Soit S la surface de ABC, S' la surface de $O'_aO'_bO_c$ et a, b, c les trois côtés du triangle;

On a évidemment

$$O'_cBA_1 + O'_cAB_1 + O'_bCA_1 + O'_bAC_1 + O'_aBC_1 + O'_aCB_1 = S + 2S'.$$

Soient A', K, H les projections de A, O'_c, B_1, sur CB;

Soit J le point où la parallèle à AA_1 menée par B_1 coupe CB, et soit $AA' = h_a$

On a

$$O'_cBA_1 = \frac{1}{2} A_1B \,.\, O'_cK.$$

$$A_1B = a\,(1 - m)$$

$$\frac{O'_cK}{B_1H} = \frac{A_1B}{JB};$$

mais

$$\frac{B_1H}{AA'} = \frac{B_1C}{AC} = \frac{1 - n}{1};$$

donc

$$B_1H = h_a\,(1 - n)$$

et par suite

$$O'_cK = \frac{ah_a(1 - n)(1 - m)}{JB}.$$

$$JB = JA_1 + A_1B;$$

mais

$$\frac{A_1}{AB_1} = \frac{CA_1}{CA};$$

donc

$$JA_1 = mna$$

et

$$JB = mna + a\,(1 - m)$$

d'où

$$O'_cK = \frac{h_a\,(1 - n)(1 - m)}{mn + 1 - m}.$$

et enfin

$$O'_cBA_1 = \frac{1}{2}\,\frac{ah_a(1-n)(1-m)^2}{1-m+mn}$$

ou

$$O'_cBA_1 = S\,\frac{(1-n)(1-m)^2}{1-m+mn}.$$

O'_cAB_1 s'obtiendra en changeant m en $1-n$ et n en $1-m$, ce qui donne

$$O'_cAB_1 = S\,\frac{n^2m}{1-m+mn};$$

d'où

$$O'_cBA_1 + O'_cAB = S\,\frac{mn^2+(1-n)(1-m)^2}{1-m+mn},$$

et par permutation tournante

$$O'_b\,CA_1 + O'_bAC_1 = S\,\frac{pm^2+(1-m)(1-p)^2}{1-p^2+pm},$$

et

$$O'_aBC_1 + O'_aCB = S\,\frac{np^2+(1-p)(1-n)^2}{1-n+np};$$

d'où enfin

$$S + 2S' = S\left[\frac{mn^2+(1-n)(1-m)^2}{1-m+mn} + \frac{pm^2+(1-m)(1-p)^2}{1-p+pm} + \frac{np^2+(1-p)(1-n)^2}{1-n+np}\right].$$

La fonction entre parenthèses reste la même en changeant respectivement m, n, p, en n, p, m; c'est-à-dire si au lieu de S' il s'agit du triangle S″ formé par AA_2, BB_2, CC_2, et aussi s'il s'agit du triangle S‴ formé par AA_3, BB_3, CC_3 en changeant m, n, p respectivement en p, m, n.

Le théorème est donc démontré.

REMARQUE I. — Si les trois droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent au même point, il en est de même de AA_2, BB_2, CC_2 et de AA_3, BB_3, CC_3.

REMARQUE II. — Dans ce cas, S' est nul et la fonction entre parenthèses doit être égale à l'unité : donc la relation

$$mnp = (1-m)(1-n)(1-p)$$

entraîne

$$\frac{mn^2 + (1 - n)(1 - m)^2}{1 - m + mn} + \frac{pm^2 + (1 - m)(1 - p)^2}{1 - p + pm}$$
$$+ \frac{np^2 + (1 - p)(1 - n)^2}{1 - n + np} = 1$$

et aussi

$$\frac{nm^2 + (1 - m)(1 - n)^2}{1 - n + mn} + \frac{mp^2 + (1 - p)(1 - m)^2}{1 - m + pm}$$
$$+ \frac{pn^2 + (1 - n)(1 - p)^2}{1 - p - pn} = 1.$$

Nous engageons les élèves à le démontrer directement.

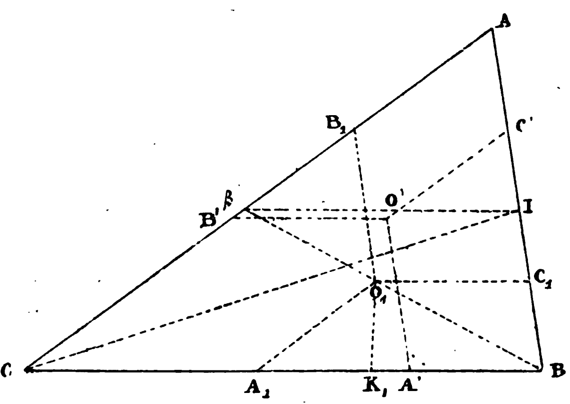
XIX

Par un point O_1 *pris dans le plan d'un triangle* ABC *on mène* $O_1A_1 = \xi_1$ *parallèle à* CA, A_1 *étant sur* BC

$O_1B_1 = \eta_1$ — AB, B_1 — CA

$O_1C_1 = \zeta_1$ — BC, C_1 — AB.

Construire le point pour lequel on a $\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1$.



Si x_1, y_1, z_1 sont les distances de O_1 à BC, CA, AB, on a

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 2S. \qquad (1)$$

Mais si K_1 est le pied de la perpendiculaire abaissée de O_1 sur BC, on a

$$O_1K_1 = O_1A_1 \sin C$$

ou

$$x_1 = \frac{\xi_1 c}{2R};$$

de même

$$y_1 = \frac{\eta_1 a}{2R},$$

$$z_1 = \frac{\zeta_1 b}{2R}.$$

R étant le rayon du cercle circonscrit à ABC, la relation (1) devient donc

$$ac\xi_1 + ab\eta_1 + cb\zeta_1 = 4SR = abc; \qquad (2)$$

l'hypothèse $\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = d$ donne donc

$$d = \frac{abc}{ac + ab + bc}$$

ou

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Si par un point O′ quelconque du plan on mène

$O'A' = \xi'$ parallèle à AB
$O'B' = \eta'$ — BC
$O'C' = \zeta'$ — CA

on verra de même qu'il existe entre ξ' η' ζ' la relation

$$ab\xi' + bc\eta' + ac\zeta' = abc, \qquad (3)$$

ce qui donne aussi un point particulier O′ pour lequel on a

$$\xi' = \eta' = \zeta' = \frac{abc}{ac + ab + bc} = d.$$

M. Jérabek a publié (*Mathesis*, t. Ier, p. 191) une intéressante étude sur les points pour lesquels on a

$$\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 \text{ ou } \xi' = \eta' = \zeta'.$$

La construction géométrique que nous allons indiquer est de la plus grande simplicité.

Joignons BO_1 qui coupe CA en β'; par β' menons une parallèle à CB qui coupe AB en I.

Comme on a $O_1C_1 = O_1A_1$, on a $\beta'I = \beta'C$; le triangle $C\beta'I$ est donc isoscèle, et par suite CI est la bissectrice de l'angle ACB.

De là résulte la construction suivante :

Par le pied sur AB *de la bissectrice de* C, *on mène une paral-*

lèle à CB *qui coupe* AC *en un certain point qui, joint à* B, *donne une droite sur laquelle est le point* O_1.

Par le pied sur AC *de la bissectrice de* B *on mène une parallèle à* AB *qui coupe* BC *en un certain point qui joint à* A *donne une droite sur laquelle est le point* O_1.

On obtiendrait O′ par une construction analogue.

Les élèves peuvent s'exercer aux questions suivantes :

I. *Le lieu du point pour lequel*

$$\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1 = \text{constante}$$

est une droite.

II. *Le lieu du point pour lequel*

$$\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1 + \xi' + \eta' + \zeta' = \text{constante}$$

est une droite.

III. *Le lieu du point pour lequel on a*

$$\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1 = \xi' + \eta + \zeta'$$

est une droite.

IV. *Le point dont les distances respectivement à* BC, AC, AB, *sont proportionnelles à* $\frac{c}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}$ *est tel que*

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 \text{ est un minimum.}$$

Le point dont les distances à BC, AC, AB *sont respectivement proportionnelles à* $\frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{a}{b}$ *est tel que*

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 \text{ est un minimum,}$$

et l'on a dans ces cas les relations

$$b\xi_1 = c\eta_1 = a\zeta_1 \text{ et } c\xi' = a\eta' = b\zeta'.$$

La valeur commune des minima est

$$\frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}.$$

V. *Si l'on prend sur le côté* AB *un point* J_c *tel que* $\frac{J_cA}{J_cB} = \frac{c^2 + b^2}{c^2 + a^2}$ *et sur les autres côtés les points* J_a *et* J_b *analogues, on a trois droites qui concourent au point pour lequel*

$$\xi^2_1 + \eta^2_1 + \zeta^2_1 + \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 \text{ est un minimum.}$$

VI. *La droite qui joint un sommet à l'un des points* O_1 *ou* O′ *pour lesquels on a*

$$\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 \quad ou \quad \xi' = \eta' = \zeta'$$

divise le côté opposé en deux segments qui sont proportionnels à deux des côtés du triangle. *(A suivre.)*

EXERCICES SUR LES INÉGALITÉS

(Suite, voir p. 3.)

6. — *La moyenne harmonique de* p *nombres est toujours plus petite que leur moyenne géométrique.*

On appelle moyenne harmonique de p nombres $a,b,c, \ldots k,l$, un nombre x satisfaisant à l'égalité suivante:

$$\frac{p}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \ldots + \frac{1}{k} + \frac{1}{l};$$

on en tire

$$x = \frac{p}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \ldots + \frac{1}{k} + \frac{1}{l}}.$$

L'inégalité à démontrer est une conséquence de la précédente; en effet, d'après l'énoncé, on doit avoir

$$\sqrt[p]{abc \ldots kl} > \frac{p}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{k} + \frac{1}{l}};$$

or, d'après la proposition précédente, on a

$$\sqrt[p]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdots \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{l}} < \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ldots + \frac{1}{k} + \frac{1}{l}}{p};$$

on en tire immédiatement la proposition énoncée.

7. — *Démontrer que l'on a,* a *étant différent de* b,

$$a^3 + b^3 > \frac{(a+b)^3}{4},$$

et plus généralement

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^k < \frac{a^k + b^k}{2},$$

*(*k *étant un nombre entier positif).*

Étendre ce théorème à des quantités positives a, b, c, ... k, l, *en nombre* p.

On a

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$(a + b)^3 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2).$$

L'inégalité (1) revient à celle-ci :

$$3(a + b)(a - b)^2 > 0,$$

qui est évidente.

Pour la seconde posons

$$a = x + \alpha,$$
$$b = x - \alpha;$$

il est évident que, quelle que soit la loi du développement de la m^e puissance d'un binôme, si l'on a, m, n, p étant des entiers positifs,

$$(x + \alpha)^k = x^k + mx^{k-1}\alpha + nx^{k-2}\alpha^2 + px^{k-3}\alpha^3 + qx^{k-4}\alpha^4 + \dots$$

on aura aussi

$$(x - \alpha)^k = x^k - mx^{k-1}\alpha + nx^{k-2}\alpha^2 - px^{k-3}\alpha^3 + qx^{k-4}\alpha^4 - \dots$$

Donc

$$\frac{a^k + b^k}{2} = x^k + nx^{k-2}\alpha^2 + qx^{k-4}\alpha^4 + \dots$$

et l'inégalité proposée se transforme dans la suivante :

$$x^k < x^k + nx^{k-2}\alpha^2 + qx^{k-4}\alpha^4 + \dots$$

qui est évidente.

Cela posé, considérons quatre quantités a, b, c, d; nous avons

$$\left(\frac{a + b + c + d}{4}\right)^k = \left(\frac{\frac{a + b}{2} + \frac{c + d}{2}}{2}\right)^k$$

et par conséquent

$$\left(\frac{a + b + c + d}{4}\right)^k < \frac{\left(\frac{a + b}{2}\right)^k + \left(\frac{c + d}{2}\right)^k}{2};$$

mais nous avons vu que l'on a

$$\left(\frac{a + b}{2}\right)^k < \frac{a^k + b^k}{2};$$
$$\left(\frac{c + d}{2}\right)^k < \frac{c^k + d^k}{2}.$$

Donc

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^k < \frac{a^k+b^k+c^k+d^k}{4}.$$

On prouverait de même que la proposition est vraie pour 8, 16, ... 2^n quantités positives.

Je dis que, si elle est vraie pour $p+1$ nombres, elle est vraie pour p. On a, en effet, identiquement

$$\frac{a+b+c+\ldots+h}{p} = \frac{\frac{p+1}{p}(a+b+c+\ldots+h)}{p+1}$$

$$= \frac{a+b+c+\ldots+h+\frac{a+b+\ldots+h}{p}}{p+1}.$$

On a donc

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}\right)^k$$

$$= \left(\frac{a+b+c+\ldots+h+\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}}{p+1}\right)^k.$$

On en tire, d'après l'hypothèse que la proposition s'applique à $(p+1)$ quantités,

$$\left(\frac{a+b+c\ldots+h}{p}\right)^k < \frac{a^k+b^k+c^k+\ldots+h^k+\left(\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}\right)^k}{p}$$

et par suite

$$\left(\frac{a+b+\ldots+h}{p}\right)^k < \frac{a^k+b^k+c^k+\ldots+h^k}{p}.$$

8. — *Soient* p *nombres en progression arithmétique,* a, b, ... k, l; *démontrer que l'on a*

$$\sqrt[p]{ab\ldots kl} < \frac{a+l}{2}, \quad et \quad \sqrt[p]{b\ldots l} > \sqrt[p]{al}.$$

Pour la première partie, on a, d'après le théorème de Cauchy,

$$\sqrt[p]{ab\ldots kl} < \frac{a+b+\ldots+l}{p}.$$

Mais on sait aussi que l'on a, dans une progression arith-

métique

$$a + b + c + \ldots + l = \frac{p}{2}(a + l).$$

On en déduit bien la proposition indiquée.

En second lieu, on sait que, lorsque la somme de deux nombres est constante, le produit de ces deux nombres est d'autant plus grand que la différence entre ces nombres est moindre; il en résulte que, dans une progression arithmétique, le produit de deux termes également distants des extrêmes est supérieur au produit des extrêmes; on a donc

$$\begin{aligned} al &= la \\ bk &> la \\ ch &> la \\ &\ldots \\ &\ldots \\ hc &> la \\ kb &> la \\ la &= la. \end{aligned}$$

Donc, en multipliant ces inégalités et égalités membre à membre, il vient

$$(abc \ldots kl)^2 > (al)^p;$$

et, en extrayant la racine carrée $2p$:

$$\sqrt[p]{abc \ldots kl} < \sqrt{al}.$$

Comme application, on a, en prenant les p premiers nombres entiers

$$\sqrt{p} < \sqrt[p]{1 \cdot 2 \ldots p} < \frac{p+1}{2}.$$

(Cette double inégalité est proposée dans l'Algèbre de Todhunter.)

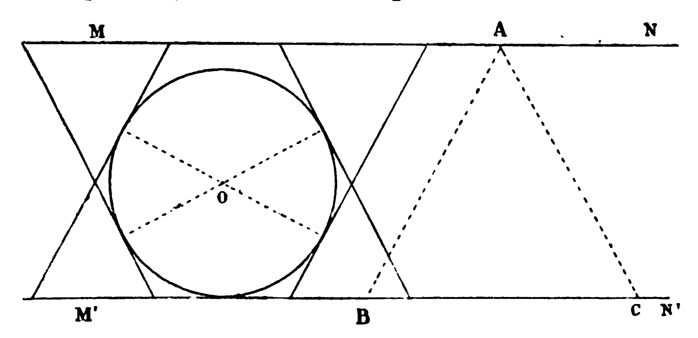
QUESTION 104

Solution par M. Ch. Laisant, élève à l'École Monge.

On donne un cercle compris entre deux droites parallèles ; on demande de mener à ce cercle une tangente telle que la partie de cette tangente comprise entre les deux parallèles ait une longueur donnée.

Soit une circonférence O comprise entre les parallèles MN, M'N'.

On prend un point quelconque A sur la ligne MN, et avec un rayon égal à la longueur donnée on décrit un arc de cercle qui coupe M'N' aux deux points B et C.



On tire les lignes AB, AC, et on leur mène à chacune deux parallèles tangentes au cercle O.

On voit que si la longueur donnée est plus petite que la distance des parallèles, le problème est insoluble.

Si la longueur donnée est égale à la distance des parallèles, le problème n'a que deux solutions.

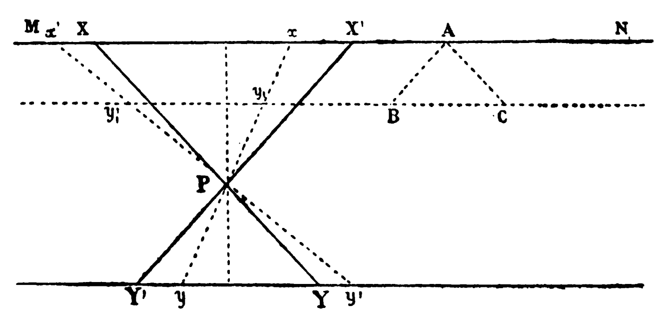
Si enfin la longueur donnée est plus grande que la distance des parallèles, le problème a quatre solutions.

QUESTION 105

Solution par M. Ch. Laisant, élève à l'École Monge.

On donne deux parallèles MN, M'N' *et un point* P *entre ces deux parallèles ; mener par le point* P *une droite rencontrant* MN *en* x, M'N' *en* y, *de telle façon que* Px — Py *ait une longueur donnée* C.

Par le point P je mène deux lignes quelconques xy, $x'y'$;



on reporte Py sur Px et Py' sur Px', de sorte que l'on aperçoive clairement que

$$xy_1 = Px - Py,$$
$$xy'_1 = Px' - Py'.$$

Il n'est pas difficile de démontrer que le lieu géométrique des points tels que $y_1y'_1$ est une parallèle à MN et à M'N'.

Cela posé, le problème est ramené à inscrire une droite d'une longueur donnée entre deux parallèles et passant par le point P.

En effet, soit mn la nouvelle parallèle obtenue. D'un point quelconque A pris sur MN avec un rayon égal à c, la différence donnée, on décrit un arc de cercle qui coupe mn en deux points B, C.

On tire les lignes AB, AC, auxquelles on mène des parallèles par le point P, et l'on a les lignes demandées.

On voit que si la longueur donnée c est égale à la distance

de MN à mn, il n'y a qu'une solution, et que si elle est plus grande, il y en a deux.

NOTE. — Ces questions, un peu trop simples, peuvent être facilement généralisées.

Soient Δ et Δ' les deux parallèles, et P un point fixe donné. On peut proposer de mener par P une transversale qui rencontre Δ et Δ' aux points A et A' et de telle façon qu'il existe entre PA et PA' une relation de la forme

$$m\text{PA} + n\text{PA}' = l,$$

l étant une ligne donnée, m et n désignant des nombres donnés positifs ou négatifs.

En appelant h et h' les distances du point P aux droites Δ, Δ', on a

$$\frac{\text{PA}}{\text{PA}'} = \frac{h}{h'},$$

et par suite

$$\frac{m\text{PA}}{n\text{PA}'} = \frac{mh}{nh'},$$

ou finalement

$$\text{PA} = l \,.\, \frac{h}{mh + nh'}$$

et

$$\text{PA}' = l \,.\, \frac{h'}{mh + nh'}.$$

Le problème se résout par la construction d'une quatrième proportionnelle.

On peut ensuite proposer de mener la transversale de façon que l'on ait

$$m\text{PA}^2 + n\text{PA}'^2 = l^2, \text{ etc.}$$

Toutes ces questions sont bien connues; leur solution et leur discussion n'offrent aucune difficulté.

(G. L.)

NOTA.— Les questions 104 et 105 ont été aussi résolues par MM. Chapron, à Versailles; Coronnet, collège Chaptal; de Kerdrel, à Kéruzoret; Blessel, à Paris; Berthelot, à Orléans; Besson, à Nantes.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Besançon.

On donne une droite AB, de longueur $2a$. Trouver le rayon x d'un cercle passant par les deux points A et B, de telle façon que le quadrilatère ABCD, qui a ses sommets aux extrémités de la corde AB et du diamètre CD perpendiculaire à AB, ait un périmètre donné $4p$. Quelle serait la valeur de x si, au lieu du périmètre, on supposait donnée la différence entre la somme des deux côtés DB, DA et la somme des deux côtés CB et CA ?

— Un verre à pied, de forme conique, dont le diamètre est 0^m25, au bord supérieur, contient exactement 1 litre à 4° centigrades; il est complètement rempli par des poids égaux d'eau et de mercure. On demande quelle doit être l'épaisseur de la couche d'eau, sachant que la densité du mercure est 13,596 à 4° centigrades.

Bordeaux.

Session de novembre (série unique).

Calculer la longueur y d'une droite, connaissant la différence d des deux segments de cette droite divisée en moyenne et extrême raison.

— Étant donnée l'expression

$$m \cos \theta + n \cos (\theta + \alpha)$$

dans laquelle m, n, θ et α sont des quantités connues, la transformer en celle-ci :

$$x \cos (\theta + \varphi)$$

et déterminer les valeurs de x et de φ.

— Une masse d'eau de 548 kilog. à 35° est mélangée avec 210 kilog. de glace à zéro. Dire si toute la glace sera fondue, et, dans le cas de l'affirmative, calculer la température à laquelle se trouvera le mélange. Indiquer le sens des variations de volume qu'éprouveraient d'une part l'eau à 35°, et de l'autre part la glace après sa fusion.

— Expériences à l'aide desquelles on établit la composition de l'air.

Marseille.

Résoudre et construire un triangle connaissant le périmètre, la hauteur et le rapport des segments que cette hauteur détermine sur le côté opposé.

VARIÉTÉS

NOTE SUR LA TABLE DE LOGARITHMES

A SIX DÉCIMALES CONSTRUITE SUR UN PLAN NOUVEAU

Par M. **Adolphe Benoist,**
Docteur en droit, membre de la Société mathématique de France.
(Paris, librairie de M. DELAGRAVE.)

Les tables de Callet, de Dupuis, de Schrön, de Bremiker, etc., dont on se sert depuis longtemps en France et à l'étranger, donnent les logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques avec 7 décimales. Y a-t-il une raison majeure qui force à évaluer les logarithmes avec une si grande approximation? Faut-il regretter que les calculateurs de tables n'aient pas eu le courage d'aller jusqu'à 8, 9... décimales? Faut-il regretter avec Terquem que l'on n'ait pas imprimé les tables manuscrites de Borda à 10 décimales, déposées à l'Observatoire? Une table à 6 décimales n'est-elle pas suffisante pour tous les calculs? Une table à 5 ou même à 4 décimales, beaucoup plus portative et plus maniable, ne convient-elle pas à la résolution de la plupart des problèmes? On peut répondre facilement à toutes ces questions, et nous saisissons de nouveau l'occasion qui nous est offerte de répéter encore aux lecteurs du journal ce que nous avons dit dans le premier volume sur les applications numériques.

Commençons par rappeler le principe suivant:

Un logarithme n'a pas plus de chiffres exacts qu'il n'y en a dans le nombre, et réciproquement.

Ce principe est évident : le logarithme d'un nombre dépend de ce nombre et s'en déduit au moyen de calculs particuliers ; or, les résultats d'un calcul ne peuvent pas être plus approchés que les données. On peut s'assurer d'ailleurs de la justesse de notre conclusion à l'aide des tables mêmes. Soit à trouver le logarithme de $\pi = 3{,}14159265358\ldots$ à l'aide des tables à 7 décimales; nous ferons le calcul suivant :

$$\begin{array}{rr}
\log 3{,}1415\ \ldots\ldots = & 0{,}497.1371 \\
9\ \ldots\ldots & 124{,}2 \\
2\ \ldots\ldots & 2{,}76 \\
6\ \ldots\ldots & 0{,}828 \\
\hline
\log 3{,}1415926\ \ldots\ldots = & 0{,}497.1499
\end{array}$$

On voit qu'en regardant comme *exacte* la proportion d'interpolation, les chiffres 9 et 2 donnent seuls une correction sur les 7 chiffres décimaux du logarithme; la correction venant du chiffre suivant 6 porterait sur le 8e, le 9e ... chiffre du logarithme. Donc, 7 chiffres de π font connaître les 7 chiffres décimaux de son logarithme ; en prenant π avec une plus grande approximation, le logarithme ne serait pas différent. Réciproquement le logarithme 0,497.1499 fera connaître π avec 7 figures, comme on peut s'en assurer par le calcul suivant :

$$\begin{array}{lr}
\log \pi = 0{,}497.1499 & \\
\pi = 3{,}1415927\ \ldots\ldots & 1499 \\
 & 1371 \\
\hline
 & 128 \\
 & 124{,}2 \\
\hline
 & 3{,}8 \\
 & 2{,}76 \\
\hline
 & 1{,}04
\end{array}$$

On voit que les deux premiers chiffres 9, 2 tirés du calcul interpolatoire sont bons et que le 3e est déjà erroné. Donc la connaissance de 7 décimales dans le logarithme conduit à la connaissance de 7 chiffres dans le nombre.

On peut remarquer ici que le calcul interpolatoire ne peut

pas donner plus de deux chiffres exacts pour la correction, d'abord parce qu'il n'est pas vrai de dire que la variation du logarithme est proportionnelle à celle du nombre, et ensuite parce que les différences logarithmiques ne sont connues qu'approximativement avec deux ou trois figures.

Ces principes posés, il est facile de dire quelle est la meilleure table de logarithmes, et de porter un jugement motivé sur l'œuvre de M. Benoist.

1° Dans la plupart des applications industrielles, les nombres donnés n'ont pas plus de 3 figures exactes. Si l'on opère sur de pareils nombres, il suffit d'une table à 3 décimales, qui tient sur une simple feuille de papier, ou mieux encore de la règle à calcul, qui n'est qu'une table graphique de logarithmes à 3 décimales. Il y aurait un grand avantage à exercer les élèves au maniement d'une pareille table; ils apercevraient ainsi que l'emploi des logarithmes abrège réellement les calculs et permet de résoudre des problèmes difficiles. Montrons la vérité de notre assertion par deux exemples.

Exemple 1. — *Les dimensions mesurées d'un champ rectangulaire sont* B $= 55^{m},4$, H $= 37^{m},8$; *trouver son aire avec autant d'approximation que possible.*

Calcul direct par la multiplication abrégée.

$$\begin{array}{rr} B = & 55,4 \\ H = & \underline{8,73} \\ & 1662 \\ & 388 \\ & \underline{44} \\ S = & 2094 \text{ mq} \end{array}$$

Calcul par logarithmes.

$$\begin{array}{rl} \log B = & 1,743 \\ \log H = & 1,577 \\ \log S = & \overline{3,320} \\ S = & 2090 \text{ mq} \end{array}$$

Le nombre des chiffres certains ne dépasse pas 3; on les obtient par l'emploi des logarithmes à 3 décimales, avec rapidité.

Exemple 2. — *Au bout de combien de temps un capital placé à intérêts composés au taux de 5 o/o sera-t-il doublé?*

Il s'agit de résoudre l'équation $(1,05)^x = 2$. Voici le tableau des calculs :

$$x \log (1{,}05) = \log 2 ; \qquad x = \frac{0{,}301}{0{,}021} = 14^a\ 4^m.$$

2° Dans les expériences délicates de la physique, de la chimie, de la géodésie, de la mécanique, etc., on parvient à évaluer les grandeurs avec 4 ou 5 figures exactes. Dans les calculs où entreront de pareilles données on se servira de tables à 4 ou 5 décimales. La détermination des 5 premières figures d'une grandeur mesurée représente à peu près le maximum d'approximation qu'on puisse atteindre dans les applications ; on peut donc dire qu'une table à 5 décimales suffit pour la solution de tous les problèmes numériques qu'on peut rencontrer dans les recherches scientifiques. L'astronome Lalande ne s'est jamais servi d'autres tables dans ses calculs d'astronomie, et Le Verrier avait en 1852 proscrit avec raison toute table plus étendue dans les lycées et collèges de l'Empire.

Cette mesure était excellente. Les tables à 5 décimales sont d'un petit format ; on arrive rapidement à en connaître le mécanisme, et l'on peut voir quel est l'avantage de la substitution des opérations logarithmiques aux opérations ordinaires ; tandis que les élèves sont vite rebutés par la grosseur des tables à 7 décimales, la difficulté d'apprendre à s'en servir, et la longueur des calculs auxquels leur emploi conduit, sous prétexte d'abréger les opérations de l'arithmétique.

3° Grâce aux perfectionnements de la mécanique, les astronomes sont en possession d'instruments admirables qui leur permettent d'évaluer les distances angulaires à moins d'*une* seconde d'arc. On peut se faire une idée de cette précision en remarquant qu'une seconde est l'angle sous lequel on voit un mètre à la distance de 200 kilomètres. La mesure du temps est d'une précision encore plus grande. Arrivera-t-on à une précision supérieure ? Pourra-t-on atteindre, dans la mesure des angles, 0,1 de seconde, c'est-à-dire l'angle sous lequel on verrait un mètre à la distance de 2000 kilomètres, ou 500 lieues ? C'est douteux. Les défauts des instruments, les incertitudes des corrections, sont au moins de cet ordre.

Quoi qu'il en soit, on peut dire qu'en astronomie la mesure

des angles et du temps donne des nombres ayant jusqu'à 6 figures exactes : car un angle tel que $69°54'38''$ est égal à $251678''$. Il faut donc à un astronome des tables à 6 décimales, et ces tables présentent la limite extrême de l'approximation dont on peut avoir besoin. Il n'est pas un seul calcul d'astronomie qui exige l'emploi de tables plus étendues. Les tables à 7 décimales sont donc parfaitement inutiles; leur approximation dépasse les besoins des calculs les plus rigoureux.

Nous louons donc M. Benoist d'avoir entrepris le travail pénible qu'exige la publication d'un ouvrage important, qui manquait à la France, et qui répond aux besoins les plus exigeants des astronomes. L'auteur a d'ailleurs disposé ses tables de la manière la plus commode, et il me paraît bon de faire connaître les améliorations les plus saillantes qu'elles présentent par rapport aux tables connues.

En supprimant la 7e décimale des logarithmes, on réduit la différence tabulaire à 1 ou 2 chiffres. Les calculs d'interpolation se font donc à vue. M. Benoist a su disposer les petits tableaux de corrections de manière à rendre la recherche du nombre aussi simple que la recherche du logarithme.

Les tables des lignes trigonométriques sont à double entrée, comme celles des logarithmes des nombres. Il résulte de cette disposition d'abord une économie de place, et ensuite l'avantage d'avoir sur une même page tout ce qui se rapporte à une même ligne. Il n'y a plus pour le calculateur de confusion possible dans la recherche du logarithme d'une ligne trigonométrique.

Pour bien montrer que les tables de M. Benoist sont supérieures aux tables à 7 décimales habituellement employées, nous allons donner le calcul complet d'un triangle. On pourra comparer le tableau des opérations avec celui que nous avons donné dans le tome Ier du Journal, pour indiquer aux élèves la meilleure disposition à prendre, quand on fait usage des tables de Dupuis ou de Schrön. Les calculs auxiliaires, qui tenaient une place notable, se trouvent à peu près supprimés, quand on se sert des tables de M. Benoist.

Résolution d'un triangle.

Données (*).

$a = 25824,52$
$b = 15642,34$
$C = 84^\circ\,.\,32'\,.\,18'',4.$

Inconnues.

$A = 62\,.\,50\,.\,54$
$B = 32\,.\,36\,.\,48$
$c = 28891$

Calcul de φ.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

$\log b = 4,19\,4301$
$\log a = 4,41\,2032$
$\log \operatorname{tg}\varphi = \overline{1},78\,2269$
$\varphi = 31^\circ\,.\,12'\,.\,14''$
$\ldots\ldots\ 2269$
2249
20
$45^\circ = 44\,.\,59\,.\,60$
$45 - \varphi = 13\,.\,47\,.\,46$

Calcul de $\frac{1}{2}(A+B)$.

$\frac{1}{2}(A+B) = 90 - \frac{1}{2}C$
$90 = 89\,.\,59\,.\,60$
$\frac{1}{2}C = 42\,.\,16\,.\,9,2$
$\frac{1}{2}(A+B) = 47\,.\,43\,.\,50,8$

Calcul de c.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
$\log a^2 = 8,82\,4064$
$\log b^2 = 8,38\,8602$
$\log 2 = 0,30\,1030$
$\log a = 4,41\,2032$
$\log b = 4,19\,4302$
$\log\cos C = \overline{2},97\,8524$
$\log 2ab\cos C = 7,88\,5887$
$a^2 = 666\,904\,000$
$b^2 = 244\,682\,000$
$-2ab\cos C = \overline{1}23\,107\,000$
$c^2 = 834\,693\,000$
$\log c^2 = 8,92\,1526$
$\log c = 4,46\,0763$
$c = 28891.$

(*) *Composition donnée en 1868 pour le concours de l'École polytechnique.* — Il est clair qu'au point de vue pratique ces données sont absurdes; sur une longueur de 25 kilomètres on ne peut pas compter sur un mètre et à fortiori sur un centimètre; les dixièmes de seconde n'existent pas dans les applications. Les examinateurs en proposant ce calcul n'ont eu qu'un but. ils ont voulu s'assurer que les élèves savent se servir des tables à 7 décimales. — On peut se demander néanmoins quel intérêt il peut y avoir à être habile manipulateur de ces tables pour de futurs ingénieurs ou de futurs officiers d'artillerie, qui auront à résoudre des problèmes pratiques où les données n'auront jamais plus de 3 à 4 chiffres certains.

Calcul de $\frac{1}{2}(A - B)$.

$\text{tg}\,\frac{1}{2}(A - B) = \dfrac{\text{tg}(45 - \varphi)}{\text{tg}\,\frac{1}{2}(A + B)}$

$\log \text{tg}(45 - \varphi) = \overline{1},39\ 0143$

. . . 0088

55

$\log \text{tg}\,\frac{1}{2}(A + B) = 0,04\ 1460$

$\log \text{tg}\,\frac{1}{2}(A - B) = \overline{1},43\ 1603$

$\frac{1}{2}(A - B) = 15^\circ . 7' . 3''$

. . . 1603

1577

26

Calcul de A *et* B.

$\frac{1}{2}(A + B) = 47 . 43 . 50,8$

$\frac{1}{2}(A - B) = 15\quad 7\quad 3$

$A = 62^\circ . 50' . 54''$

$B = 32 . 36 . 48$

Vérification.

$$C = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

$\log a = 4,41\ 2032$

$\log \sin C = \overline{1},99\ 8024$

$\log \text{cosin}\, A = 0,05\ 0707$

... $\overline{1},94.9293$

$\log c = 4,46\ 0763$

L'ensemble du tableau de calcul ci-dessus montre bien que la plupart des calculs auxiliaires sont supprimés par l'emploi des tables à 6 décimales de M. Benoist; c'est là un avantage important qui doit faire abandonner définitivement les tables à 7 décimales, dont l'approximation surabondante rend sans profit le maniement laborieux.

Il nous reste, en finissant, à faire quelques critiques de détail sur l'ouvrage que nous analysons.

1° Les chiffres sont maigres, et le caractère antique des tables de Bremiker me paraît préférable pour la lecture.

2° Les blancs sont séparés par cinq nombres serrés; je pense que la disposition de Bremiker qui les sépare par 3 nombres seulement vaut mieux pour la recherche rapide des logarithmes.

3° Il eût été à désirer que le volume des tables fût moindre. Je crois que cette condition n'était pas compatible avec la disposition adoptée par M. Benoist.

4° Nous ne pouvons que louer l'auteur et l'éditeur du soin apporté dans l'exécution typographique de l'ouvrage. Il est à souhaiter qu'il soit rapidement adopté par les calculateurs de profession, afin que sa parfaite exactitude soit contrôlée, ou que l'on corrige les quelques fautes qui ont pu se glisser dans la masse considérable des chiffres qu'il renferme, malgré toute l'attention apportée par l'auteur au moment de la correction des épreuves.

J. Bourget.

QUESTIONS PROPOSÉES

129. — Deux cercles égaux O′ et O″ sont tangents au même point à un cercle O. On mène la tangente commune AA′ aux deux cercles O et O′, et l'on décrit les deux cercles C et C′ tangents à la fois aux deux cercles O, O′, et à la tangente AA′. Puis, sur la ligne OO′ comme diamètre, on décrit une circonférence S. Si γ est le cercle tangent à la fois aux trois cercles O, O′ et S, le diamètre du cercle γ est moyen proportionnel entre les rayons des cercles C et C′.

(Perrin.)

130. — Le volume compris entre deux sphères tangentes extérieurement et le cône circonscrit à ces sphères est équivalent à la moitié du volume compris entre ce cône et la sphère passant par les deux cercles de contact du cône avec les deux sphères données. *(Perrin.)*

131. — Si l'on désigne par m la somme des trois quatrièmes proportionnelles $\frac{yz}{x}$, $\frac{zx}{y}$, $\frac{xy}{z}$, que l'on peut former avec les trois longueurs x, y, z, la relation

$$4R^3 - 4R^2m + Rm^2 - 2xyz = 0$$

sera vérifiée dans un triangle :

1° Si x, y, z représentent les distances du point de concours des hauteurs aux trois côtés, et R le rayon du cercle circonscrit;

2° Si x, y, z représentent les distances du centre du cercle inscrit aux sommets, et R le *diamètre* du cercle circonscrit.

La relation précédente se décompose en facteurs lorsque $y = z$. *(Em. Lemoine.)*

132. — Construire par la géométrie un triangle isoscèle connaissant, soit les distances de ses sommets au centre du cercle inscrit, soit les distances du point de concours des hauteurs aux côtés. *(Em. Lemoine.)*

133. — Etant donnés un triangle ABC et deux points A′ et A_1, sur le côté BC, mener par ces deux points un cercle qui coupe AC en B′ et B_1, AB en C′ et C_1 de façon que AA′, BB′, CC′ concourent en un même point. On voit facilement que AA_1, BB_1, CC_1 concourent aussi. *(Em. Lemoine.)*

134. — On considère un cercle Δ de centre O; soit AB un diamètre de ce cercle, et OC le rayon perpendiculaire à AB. On prend

$$OF = FC = CH = \frac{R}{2};$$

par le point H on mène une droite Δ′ parallèle à AB, et par le point C une droite Δ″, également parallèle à AB. Cela posé, par A, on trace une transversale mobile, qui rencontre Δ en M, et Δ″ en M′. En M, on mène la tangente à Δ, et cette droite rencontre en I la perpendiculaire abaissée de M′ sur AB. Soit K le point où M′I rencontre Δ′. Démontrer: 1° que le cercle δ décrit du point I comme centre avec IK pour rayon rencontre MI en un point dont le lieu géométrique est un cercle; 2° que δ passe constamment par un point fixe, le point F. *(G. L.)*

135. — On considère un cercle de centre O, et un diamètre AB; aux points A et B, on mène les tangentes Δ, Δ′; soit M un point pris sur la circonférence donnée; la tangente en ce point rencontre Δ et Δ′ en P et P′. Soit M′ le point diamétralement opposé à M. Les droites M′P, M′P′ rencontrent AB aux points Q, Q′; ayant posé $OQ = x$, $OQ' = y$, on demande de démontrer que ces quantités variables

x et y vérifient la relation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{R},$$

R étant le rayon de la circonférence donnée. En déduire, entre autres conséquences, que si l'on porte OQ′ de O en R sur le diamètre perpendiculaire à AB, la droite RQ passe par un point fixe. *(G. L.)*

136. — On donne un cercle Δ et une tangente Δ′. Soit O le centre du cercle; on mène par O une demi-droite qui rencontre Δ en A, et Δ′ en A′. Soit I le conjugué harmonique de O par rapport à AA″. Ayant projeté le point I sur Δ′, au point B, on mène BA. Démontrer que BA passe par un point fixe. *(G. L.)*

137. — On considère deux droites rectangulaires Ox et Oy, et une droite Δ parallèle à Ox. Par O, on mène une transversale mobile qui rencontre Δ en A; de O comme centre, avec OA pour rayon, on décrit un cercle qui rencontre Ox en B; par B, on mène une parallèle à Oy, et cette parallèle rencontre Δ en M. Démontrer que si l'on projette M sur Oy en B_1 et O en I sur BB_1 le lieu du point I est une circonférence. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 2786-4.

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 25.)

XX

On donne un triangle équilatéral ABC ; *trouver le lieu du point* M *tel que* MC = MA + MB.

Ce problème est fort connu, la solution que nous allons en donner se recommande par la plus extrême simplicité.

Il est évident que pour le point M on peut écrire

$$MC.AB = MA.CB + MB.CA :$$

car on a simplement ainsi multiplié chaque terme de la relation donnée par un côté du triangle équilatéral ; or cette égalité exprime que dans le quadrilatère ABCM le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés, c'est-à-dire que ce quadrilatère est inscriptible. Donc le point M se trouve sur le cercle circonscrit à ABC.

XXI

Soit un triangle ABC ; *je projette les deux sommets* B *et* C *en* B′ *et en* C′ *sur une droite passant par le point* A.

Par C′ *je mène une perpendiculaire sur* AB ;

Par B′ — — — AC.

Ces deux perpendiculaires se rencontrent sur la hauteur partant de A.

Soient A′, C_1, B_1 les pieds des perpendiculaires abaissées respectivement de A, C′, B′ sur AC, AB, AC.

Soit O le point où $C'C_1$ coupe AA′ ;

Soit O′ — $B'B_1$ — .

Les deux triangles semblables OAC_1, AA′B donnent

$$OA = \frac{AB \times AC_1}{AA'} \quad (1)$$

Les deux triangles semblables $O'AB_1$, $AA'C$ donnent

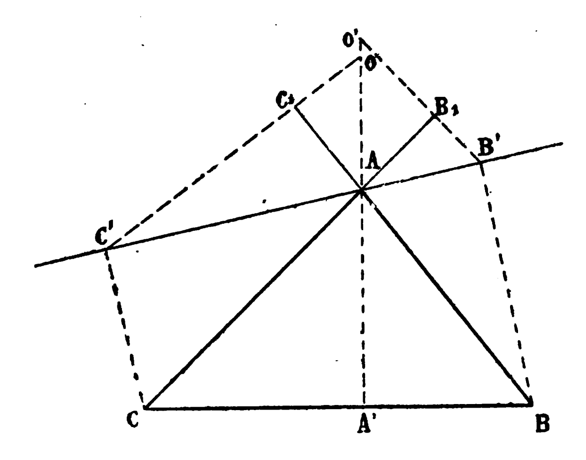
$$O'A = \frac{AC \times AB_1}{AA'} \qquad (2)$$

— — $AC'C_1$, ABB' donnent

$$AC' \times AB' = AB \times AC_1 \qquad (3)$$

— — $AB'B_1$, ACC' donnent

$$AC' \times AB' = AC \times AB_1 \qquad (4)$$



La comparaison de (3) et (4) donne

$$AB \times AC_1 = AC \times AB_1\ ;$$

par conséquent les égalités (1) et (2) donnent

$$AO = AO',$$

c'est-à-dire que O et O' coïncident; C. Q. F. D.

L'énoncé de ce théorème m'a été indiqué par M. Jos. Marchand, qui en a fait la base d'une méthode encore inédite pour mener les plans tangents aux surfaces gauches.

On peut évidemment le généraliser ainsi :

Si l'on projette en A', B', C', *les trois sommets d'un triangle* ABC *sur une droite quelconque du plan, et si de* A', B', C' *on abaisse des perpendiculaires respectivement sur* BC, AC, AB, *ces trois perpendiculaires se coupent en un même point.*

Et généraliser encore cette dernière proposition par projection.

XXII

Etant donnés un triangle ABC *et un point* O *dans son plan, déterminer les angles du triangle* A'B'C' *tel qu'il ait* ABC *pour projection et que son point de concours des hauteurs* O' *se projette en* O.

Joignons OA, OB, OC qui coupent respectivement en A_1, B_1, C_1 les côtés BC, AC, AB; appelons l, m, n les trois rapports

$$\frac{CA_1}{A_1B}, \quad \frac{AB_1}{B_1C}, \quad \frac{BC_1}{C_1A};$$

si l'on désigne par x, y, z les trois côtés B'C', A'C', A'B'; et par A', B', C' les angles B'A'C', A'B'C', A'C'B', il est évident que puisque les rapports se conservent en projection l'on aura, en désignant par A'_1, B'_1, C'_1 les pieds des hauteurs du triangle A'B'C',

$$l = \frac{C'A'_1}{A'_1B'} = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + z^2 - y^2} = \frac{y \cos C'}{z \cos B'} = \frac{\operatorname{tg} B'}{\operatorname{tg} C'};$$

$$m = \frac{A'B'_1}{B'_1C'} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{y^2 + x^2 - z^2} = \frac{z \cos A'}{x \cos C'} = \frac{\operatorname{tg} C'}{\operatorname{tg} A'};$$

$$n = \frac{B'C'_1}{C'_1A'} = \frac{z^2 + x^2 - y^2}{z^2 + y^2 - x^2} = \frac{x \cos B'}{y \cos A'} = \frac{\operatorname{tg} A'}{\operatorname{tg} B'}.$$

Si l'on remarque que l'on a $A' + B' + C' = 180$ et par suite

$$\operatorname{tg} A' + \operatorname{tg} B' + \operatorname{tg} C' = \operatorname{tg} A' \operatorname{tg} B' \operatorname{tg} C',$$

ces équations donnent

$$\operatorname{tg}^2 A' = \frac{mn + n + 1}{m},$$

$$\operatorname{tg}^2 B' = \frac{ln + l + 1}{n},$$

$$\operatorname{tg}^2 C' = \frac{lm + m + 1}{l}.$$

On peut transformer ces valeurs de diverses façons en remarquant que l'on a

$$l . m . n = 1.$$

Remarque. — En se servant des équations

$$l = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + z^2 - y^2}, \quad m = \text{etc.}$$

il est évident que l'on peut trouver directement le rapport des côtés x, y, z.

XXIII

A propos du problème XVII dont je donne ici de nouveau l'énoncé (Voir le numéro de janvier 1884, p. 21),

Soit un triangle ABC :

Sur CB *prolongé et dans le sens* CB *on a pris* A′ *tel que* BA′ = m . CB;

Sur AC *prolongé et dans le sens* AC *on a pris* B′ *tel que* CB′ = p . AC;

Sur BA *prolongé et dans le sens* BA *on a pris* C′ *tel que* AC′ = q . BA.

On connaît les trois points A′, B′, C′ *et les rapports* m, p, q.

Trouver ABC,

M. Laisant m'envoie l'élégante construction suivante, très facile à démontrer *a posteriori :*

Je divise B′C′, C′A′, A′B′ respectivement en A″, B″, C″ de façon à avoir

$$\frac{B'A''}{A''C'} = \frac{p}{q+1}, \quad \frac{C'B''}{B''A'} = \frac{q}{m+1}, \quad \frac{A'C''}{C''B'} = \frac{m}{p+1};$$

les trois droites A′A″, B′B″, C′C″ se coupent deux à deux aux points A, B, C.

Il ajoute que la *méthode des équipollences* conduit immédiatement à cette construction et donnerait de même la solution — par des constructions de triangles semblables — du problème plus général :

Sur les côtés d'un polygone inconnu ABCD... *on a construit des triangles* AA′B, BB′C, *etc., respectivement semblables à autant de triangles donnés différents les uns des autres ; on connaît les points* A′, B′, C′, D′... *Trouver les points* A, B, C, D,... qui serait évidemment bien difficile à aborder par une autre méthode.

XXIV

Inscrire dans un triangle ABC *un triangle* A′B′C′ *tel que la somme des carrés de ses côtés soit minima.*

Lemme. — *On donne deux points fixes* B′, C′ *et une droite*

fixe CB ; *trouver sur cette droite le point* A′ *pour lequel* $\overline{C'A'}^2 + \overline{B'A'}^2$ *est un minimum.*

Il est facile de démontrer que A′ est la projection sur BC du milieu α de B′C′.

Appelons α, β, γ les milieux de B′C′, A′C′, A′B′; le lemme précédent nous montre que les droites αA′, βB′, γC′ sont respectivement perpendiculaires à BC, AC, AB, et comme elles sont les médianes du triangle A′B′C′, elles se coupent en un point K.

Or l'on sait que si du *centre des médianes antiparallèles* d'un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les côtés de ce triangle ce point est le centre de gravité du triangle formé par les pieds des perpendiculaires, et réciproquement; donc le point K est le *centre des médianes antiparallèles.*

Le triangle A′B′C′ inscrit à ABC et tel que

$$\overline{B'C'}^2 + \overline{A'C'}^2 + \overline{A'B'}^2$$

soit un minimum est donc le triangle formé par les pieds des perpendiculaires abaissées du centre des médianes antiparallèles sur les trois côtés.

En désignant par S la surface de ABC, la valeur de ce minimum est

$$\frac{12S^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

XXV

On donne un triangle ABC : *soient* O_a, O_b, O_c *ls centres des trois cercles ex-inscrits à ce triangle; soient* H_a, H_b, H_c *les points de concours des hauteurs des trois triangles* CO B, BO_cA, AO_bC :

1° *Démontrer que les deux triangles* ABC, $H_aH_bH_c$ *sont égaux, et homothétiques inverses ;*

2° *Que si* X *est le centre d'homothétie de ces deux triangles,* O *le centre du cercle inscrit de* ABC, π *le centre de gravité de* ABC, *on a*

$$\frac{X\pi}{XO} = \frac{1}{3};$$

H_bC est parallèle à OA

H_bA — OC

La figure $AOCH_b$ est donc un parallélogramme; il en est de même de $AOBH_c$; donc BCH_bH_c est aussi un parallélogramme. Par suite

	H_cH_b	est égale, parallèle	et de sens	contraire à	BC
de même	H_bH_a	—	—	—	AB
—	H_aH_c	—	—	—	CA

La première partie est donc démontrée.

Le point X, qui peut être considéré comme le centre du parallélogramme H_cH_bCB, est évidemment sur la droite menée parallèlement à OA par le milieu de BC; il est aussi sur la droite menée parallèlement à OB par le milieu de AC et sur la droite menée parallèlement à OC par le milieu de AB. Cela posé, soient α, β, γ les milieux de BC, AC, AB.

Les deux triangles $X\alpha\gamma$, OCA sont homothétiques inverses, et le rapport d'homothétie est 1/2; donc si l'on joint OX, $A\alpha$, ces deux lignes se couperont en π et l'on aura

$$\frac{X\pi}{XO} = \frac{1}{3}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous engageons les élèves à examiner les théorèmes très simples qu'on obtient en projetant la figure de façon que O′ étant la projection de O, A′, B′, C′ celles de A, B, C; O′ soit le point de concours des hauteurs de A′B′C′.

(A suivre.)

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

ET PLUS PETIT MULTIPLE COMMUN DES NOMBRES FRACTIONNAIRES

Par M. **P. Barrieu,** professeur au Lycée de Mont-de-Marsan.

On dit qu'une fraction est divisible par une autre, ou multiple d'une autre, quand elle est égale au produit de cette autre par un nombre entier.

Nous appellerons *plus grand commun diviseur* de plusieurs fractions *la plus grande fraction irréductible* qui divise chacune des fractions données; *plus petit multiple commun* de plusieurs fractions, *la plus petite fraction irréductible* qui soit divisible par chacune de ces fractions.

Nous désignerons toujours par $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$ . . . les fractions irréductibles égales respectivement aux fractions $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$, $\frac{A''}{B''}$. . .

Enfin nous emploierons toujours les notations :

$$D(a, b, c, \ldots), \quad m(a, b, c, \ldots)$$

pour désigner le plus grand commun diviseur et le plus petit multiple commun des nombres a, b, c, . . .

Lemme. — *Pour qu'une fraction irréductible* $\frac{a}{b}$ *soit divisible par une fraction irréductible* $\frac{\alpha}{\beta}$, *il faut et il suffit que* α *soit un diviseur de* a, *et* β *un multiple de* b.

La condition est nécessaire, car si $\frac{a}{b}$ est divisible par $\frac{\alpha}{\beta}$, on a

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot q;$$

d'où

$$a\beta = b\alpha q.$$

Il en résulte que α divise $a\beta$, mais il est premier avec β, donc il divise a; de même b divise $a\beta$, mais il est premier avec a, donc il divise β.

La condition est suffisante, car si on a en même temps

$$a = \alpha q$$
$$\beta = bq'$$

on a

$$a\beta = \alpha bqq'$$

d'où

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot qq'.$$

Théorème I. — *Le plus grand commun diviseur de plusieurs fractions irréductibles est une fraction irréductible, qui a pour numérateur le plus grand commun diviseur des numérateurs, et pour dénominateur le plus petit multiple commun des dénominateurs.*

Soient les fractions irréductibles $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, ..., et soit $\frac{\alpha}{\beta}$ une fraction irréductible qui divise chacune des fractions données. Il résulte du lemme que α est un diviseur commun des numérateurs, et β un multiple commun des dénominateurs; $\frac{\alpha}{\beta}$ aura donc sa valeur maxima lorsque α sera le plus grand commun diviseur des numérateurs, et β le plus petit multiple commun des dénominateurs.

On a donc

$$D\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{a''}, \ldots\right) = \frac{D\,(a,\ a'\ a'', \ldots)}{m\,(b,\ b'\ b'', \ldots)}. \qquad (1)$$

En remplaçant les fractions irréductibles $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, ... par les fonctions égales $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$, $\frac{A''}{B''}$, ... l'égalité (1) devient

$$D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right) = \frac{D\,(a,\ a',\ a'', \ldots)}{m\,(b,\ b',\ b'', \ldots)}. \qquad (2)$$

D'où la règle suivante :

Pour avoir le plus grand commun diviseur de plusieurs fractions, on les réduit à leur plus simple expression, et l'on divise ensuite le plus grand commun diviseur des numérateurs par le plus petit multiple commun des dénominateurs.

Corollaire I. — *Le plus grand commun diviseur des inverses de* n *nombres entiers est égal à l'inverse du plus petit multiple commun de ces nombres.*

Car en appliquant le théorème I aux fractions irréductibles $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{a''}$, ... on a

$$D\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots\right) = \frac{1}{m\,(a, b, c, \ldots)}. \qquad (3)$$

Corollaire II. — *Le plus grand commun diviseur de plusieurs fractions irréductibles est égal au plus grand commun diviseur des numérateurs multiplié par le plus grand commun diviseur des inverses des dénominateurs.*

En effet, la formule (3) donne

$$m\,(b,\ b',\ b'',\ldots) = \frac{1}{D\left(\frac{1}{b},\ \frac{1}{b'},\ \frac{1}{b''},\ldots\right)}$$

et, en portant cette valeur dans l'égalité (1), on a

$$D\left(\frac{a}{b},\frac{a'}{b'},\frac{a''}{b''},\ldots\right) = D\,(a,\ a',\ a'',\ldots).\,D\left(\frac{1}{b},\frac{1}{b'},\frac{1}{b''},\ldots\right) \quad (4)$$

Théorème II. — *Le plus petit multiple commun de plusieurs fractions irréductibles est une fraction irréductible qui a pour numérateur le plus petit multiple commun des numérateurs, et pour dénominateur le plus grand commun diviseur des dénominateurs.*

En effet, soit $\frac{\alpha}{\beta}$ une fraction irréductible divisible par chacune des fractions irréductibles données; α sera un multiple commun des numérateurs, et β un diviseur commun des dénominateurs; $\frac{\alpha}{\beta}$ aura donc sa valeur minima lorsque α sera le plus petit multiple commun des numérateurs, et β le plus grand commun diviseur des dénominateurs.

Donc

$$m\left(\frac{a}{b},\frac{a'}{b'},\frac{a''}{b''},\ldots\right) = \frac{m(a,\ a',\ a'',\ldots)}{D(b,\ b',\ b'',\ldots)}. \quad (4)$$

En remplaçant les fractions irréductibles par les fractions égales, on a

$$m\left(\frac{A}{B},\frac{A'}{B'},\frac{A''}{B''},\ldots\right) = \frac{m(a,\ a',\ a'',\ldots)}{D(b,\ b',\ b'',\ldots)}. \quad (5)$$

Corollaire I. — *On a*

$$m\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c},\ldots\right) = \frac{1}{D(a,\ b,\ c,\ldots)}. \quad (6)$$

Corollaire II. — *On a*

$$m\left(\frac{a}{b},\frac{a'}{b'},\frac{a''}{b''},\ldots\right) = m(a,a',a'',\ldots).\,m\left(\frac{1}{b},\frac{1}{b'},\frac{1}{b''},\ldots\right) \quad (7)$$

Même démonstration que pour les corollaires du théorème I.

Théorème III. — *Toute fraction qui en divise séparément plusieurs autres, divise leur plus grand commun diviseur.*

Il suffit de démontrer le théorème pour les fractions irréductibles : car si une fraction en divise séparément plusieurs autres, la fraction irréductible qui lui est égale divise les fractions irréductibles respectivement égales à ces autres, et réciproquement.

Reprenons la formule

$$D\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots\right) = \frac{D(a, a', a'', \ldots)}{m(b, b', b'', \ldots)}.$$

Si une fraction irréductible $\frac{\alpha}{\beta}$ divise chacune des fractions, son numérateur α divise tous les numérateurs et par suite divise $D(a, a', a'', \ldots)$; d'autre part, son dénominateur β est un multiple de tous les dénominateurs, et par suite un multiple de $m(b, b', b'', \ldots)$. Donc, d'après le lemme, la fraction irréductible $\frac{\alpha}{\beta}$ divise

$$\frac{D(a, a', a'', \ldots)}{m(b, b', b'', \ldots)},$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Le plus grand commun diviseur de plusieurs fractions ne change pas quand on remplace deux ou plusieurs de ces fractions par leur plus grand commun diviseur.*

En effet, en formant les groupes

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots$$

$$D\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}\right), \frac{a''}{b''}, \ldots;$$

On voit que toute fraction irréductible qui divise les fractions du premier groupe, divise aussi celles du deuxième, et réciproquement. Donc les deux groupes ont le même plus grand commun diviseur.

On pourrait encore démontrer ce théorème par les identités de la manière suivante :

$$D\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots\right) = \frac{D(a, a', a'', \ldots)}{m(b, b', b'', \ldots)}$$
$$= \frac{D[D(a, a'), a'', \ldots]}{m[m(b, b'), b'', \ldots]}$$
$$= D\left[\frac{D(a, a')}{m(b, b')}, \frac{a''}{b''}, \ldots\right]$$
$$= D\left[D\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}\right), \frac{a''}{b''}, \ldots\right]$$

C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Toute fraction qui est un multiple commun à plusieurs autres, est un multiple de leur plus petit multiple commun.*

Corollaire. — *Le plus petit multiple commun de plusieurs fractions ne change pas quand on remplace deux ou plusieurs de ces fractions par leur plus petit multiple commun.*

Même démonstration que pour le théorème III.

Théorème V. — *Le produit du plus grand commun diviseur de plusieurs fractions par le plus petit multiple commun de leurs inverses est égal à l'unité.*

En effet, on a

$$D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right) = \frac{D(a, a', a'', \ldots)}{m(b, b', b'', \ldots)}$$
$$m\left(\frac{B}{A}, \frac{B'}{A'}, \frac{B''}{A''}, \ldots\right) = \frac{m(b, b', b'', \ldots)}{D(a, a', a'', \ldots)}$$

d'où

$$D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}\right) \cdot m\left(\frac{B}{A}, \frac{B'}{A'}, \frac{B''}{A''}, \ldots\right) = 1 \quad (8)$$

(A suivre.)

QUESTION 98

Solution par M. FERDINAND TARATTE, élève au Lycée d'Evreux.

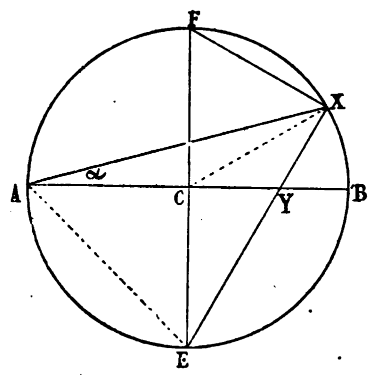
Dans un cercle dont le centre est C, *on mène deux diamètres rectangulaires* AB *et* EF. *On demande de trouver sur l'arc* BF *un point* X *tel que si l'on mène les lignes* AX, BX, EX, *dont la*

dernière rencontre CB *en* Y, *on ait*

$$AX.BX = CY.XE. \qquad \text{(Reidt.)}$$

Supposons le problème résolu. On a donc

$$\frac{AX}{CY} = \frac{EX}{BX}.$$



Mais les deux triangles EAX et BXY étant semblables, on a

$$\frac{AX}{XY} = \frac{EX}{BX}.$$

Donc CY=XY et le triangle CYX est isoscèle; mais il en est de même de CEX, et angle XCF = 2CXE = 2BCX d'où

$$XCF = 60^\circ.$$

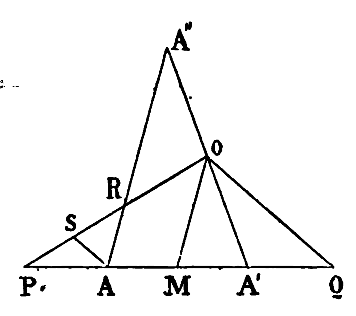
On fera donc sur CF au point C un angle de 60° et on aura ainsi le point X.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Aubry, à Douai; Youssoufian, à Constantinople; Porée, à Bernay; Naura, à Vitry-le-François; Bourgarel, à Antibes; Voignies, à Commercy.

QUESTION 103

Solution par M. AUBRY, élève au Lycée de Douai.

On considère un triangle OPQ. *Soit* A *un point pris sur* PQ, A' *le symétrique de* A *par rapport au milieu de* PQ, A″ *le symétrique de* A' *par rapport au point* O.



La droite AA″ *rencontre* OP *au point* R. *Démontrer que la médiane* AS *du triangle* RAP *est parallèle à* QO. (G. L.)

Soit M le milieu de PQ, et par suite celui de AA'; si nous joignons ce point au sommet O, OM sera parallèle à AA

et nous aurons la relation

$$\frac{PO}{PM} = \frac{PR}{PA};$$

d'où

$$\frac{PO}{2PM} = \frac{PR}{2PA}.$$

En remarquant que $PQ = 2PM$, et $PR = 2PS$, cette relation devient

$$\frac{PO}{PQ} = \frac{PS}{PA}.$$

Ce qui démontre le parallélisme de AS et de QO.

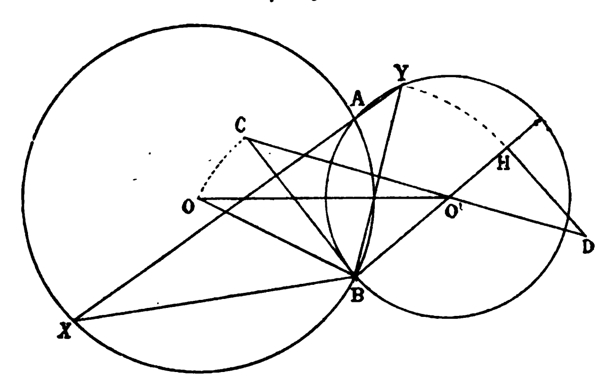
NOTA. — La même question a été résolue par M. Mathieu, à Nantes; Bourgarel, à Antibes; Guilloz, institution Sainte-Marie, à Besançon; Martin, à Nice; Chapron, à Versailles; Taratte, à Évreux; Vigarié, à Toulouse.

QUESTION 106

Solution par M. AUBRY, élève au Lycée de Douai.

Deux cercles se coupent en A *et* B. *On demande de mener par le point* A *une droite rencontrant l'un des cercles en* x, *l'autre en* y, *de façon que, si l'on tire* Bx *et* By, *on ait*

$$Bx^2 + By^2 = d^2.$$



Soient O et O' les centres des cercles donnés; tirons OO' et joignons Bx, By, BO, BO'. Les angles x et O, y et O' sont égaux comme ayant des mesures égales. Il s'ensuit que les

triangles Bxy et BOO′ sont semblables et donnent la proportion

$$\frac{Bx}{By} = \frac{BO}{BO'}.$$

On pourra donc déterminer le point y, par exemple. Par le point B on mènera une perpendiculaire à BO′, BC = BO, on joindra CO′ et on portera sur cette droite une longueur $CD = d$. On projettera le point D en H sur BO′, et de B comme centre avec BH pour rayon on décrira un arc de cercle qui en général coupera le cercle O′ en deux points.

Si l'on a $BH < 2R'$ ou, en ayant égard à la similitude des triangles BCO′ et DHO′, $CD < 2CO'$ ou $d < 2\sqrt{R^2 + R'^2}$, il y aura deux solutions.

Si $BH = 2R'$, ou $d = 2\sqrt{R^2 + R'^2}$, il n'y a qu'une solution. Enfin le problème est impossible si $d > 2\sqrt{R^2 + R'^2}$.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Caen.

Trouver deux angles x et y tels que l'on ait

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1\,; \quad \operatorname{tg}(x + y) = \frac{4}{3}.$$

— Calculer le diamètre d'une sphère d'or valant un million de francs. On admet que l'or, à volume égal, vaut 30 fois plus que l'argent, que celui-ci vaut 200 francs le kilogramme et qu'un décimètre cube d'argent pèse $10^k,500$.

— Résoudre l'équation

$$\cos 2x - \cos 6x = \sin 3x + \sin 5x.$$

— Résoudre un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse a, et sachant que ce triangle est équivalent à un carré dont le côté est k ; application : $a = 1$; $k = 0,46$.

— Calculer au bout de combien d'années et de jours sera décuplée une somme placée à intérêts composés au taux de 4 o/o ; les intérêts se capitalisent au bout de chaque année.

Clermont-Ferrand.

Étant donné un hexagone régulier, on joint les sommets de deux en deux ; on obtient ainsi deux triangles équilaté-

raux ABC, A'B'C'. On suppose le triangle A'B'C' transporté perpendiculairement au plan ABC, et parallèlement à lui-même ; on joint alors les sommets AA', A'B, BB', B'C, CC', C'A. 1° h désignant la distance des plans des deux triangles et a le côté de l'hexagone, on demande d'évaluer le volume du solide défini par la condition précédente ; 2° calculer h par la condition que toutes les faces soient des triangles équilatéraux, et évaluer le volume correspondant.

— Partager un cône en deux parties équivalentes par un plan parallèle à la base.

— Entre quelles limites varie la fraction

$$\frac{3x^2 - 5x + 5}{2x^2 - 3x + 4} ?$$

— Étant donné un triangle équilatéral ABC, on prend sur le côté CA une longueur CB' égale à α, et sur le côté AB une longueur AC' égale aussi à α ; on mène la ligne B'C', qui rencontre le prolongement de CB en un point A' ; calculer la longueur BA'. En désignant par a le côté du triangle, on fera le calcul en supposant $a = 10$, $\alpha = 6$.

— Trouver dans quel rapport un plan partage le volume d'une sphère, connaissant le rapport de la distance du centre de la sphère au rayon.

— Somme des cubes des n premiers termes d'une progression géométrique.

— Trouver la somme des n premiers nombres impairs et aussi la somme des n premiers nombres pairs.

— Partager un cône en deux parties équivalentes par un plan parallèle à la base.

— Évaluer la somme des nombres impairs de 31 à 115.

— Si l'on inscrit dans un demi-cercle un demi-polygone régulier d'un nombre pair de côtés, et qu'on lui circonscrive un demi-polygone semblable, la surface engendrée par la demi-circonférence tournant autour de son diamètre est moyenne proportionnelle entre les surfaces engendrées par les deux polygones.

— Variations de la fraction

$$\frac{x^2 - x + 3}{2x^2 - 3x + 4}.$$

— Étant donnée la relation

$$\cos x = \frac{\sin h + \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta},$$

dans laquelle on a $h = 33^\circ\, 57'\, 7'',9$;
$\varphi = 27^\circ\, 5'$;
$\delta = 13^\circ\, 38'\, 11'',1$,
calculer l'angle x.

— Dans un plan vertical, on donne deux points A et B fixes, la distance horizontale, $AC = d$, des deux points, leur distance verticale $BC = h$. Aux deux points A et B est attaché un fil de longueur h ; ce fil supporte une poulie mobile P, dont le rayon est négligeable, et dont la chape porte un poids Q. On demande: 1° de construire géométriquement la position d'équilibre du fil ; 2° d'exprimer sa tension au moyen des données; 3° de calculer cette tension lorsque $d = 8^m,25$; $h = 4,34$; $l = 12,42$; $Q = 1,937$.

— Aux trois sommets d'un triangle équilatéral sont appliquées trois forces parallèles et de même sens, dont les intensités respectives sont 1, 2, 3. Trouver la résultante de ces forces et son point d'application. Considérer le cas où la force 3 est contraire aux deux autres.

— Inscrire dans un cercle de rayon a un triangle isoscèle tel que la somme de la base et de la hauteur ait une longueur donnée l.

— La surface d'un secteur circulaire est 5^{m^2} ; son angle au centre est 49° ; on demande à moins de $0^m,001$ le rayon de la base d'un cône circulaire droit dont ce secteur est le développement de la surface latérale sur un plan. Volume de ce cône.

— Connaissant dans un triangle le périmètre et les angles, on demande de calculer sous forme logarithmique les trois côtés et la surface.

— La hauteur d'un cône est 15 m.; le rayon de sa base 7 m. ; on demande à quelle distance de la base il faut mener un plan parallèle pour que le volume du tronc de cône soit 150 mètres cubes. Surface latérale de ce tronc de cône.

— Former l'équation du second degré qui admet pour

racines 2 et $-\frac{5}{7}$; ou qui admet pour racines $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

— Le volume d'un cône est $\frac{1}{3}$ de mètre cube; le rayon de sa base est 1 mètre. Calculer la surface latérale.

— Entre quelles limites varie la fraction $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$?

— On donne la somme l de l'hypoténuse et de la hauteur d'un triangle rectangle; entre quelles limites peuvent varier la surface et le périmètre de ce triangle rectangle?

Dijon.

Deux points fixes A et B étant donnés sur l'un des côtés d'un angle, déterminer sur l'autre côté un point M, tel que la somme $MA^2 + MB^2$ soit égale à une quantité donnée. Discussion.

— Calculer l'angle aigu B d'un triangle rectangle dans lequel on connaît l'hypoténuse a, et la longueur β de la bissectrice, soit intérieure, soit extérieure, issue du sommet de cet angle B.

— Angle de deux droites qui se coupent sur la ligne de terre, et sont dans un plan passant par cette ligne de terre.

Lyon.

Deux triangles semblables ont leurs bases homologues dans un rapport donné, par exemple de 2 à 3. Après avoir fait tourner ces triangles chacun autour de sa base, on propose de dire dans quel rapport sont respectivement les surfaces et les volumes engendrés.

— Calculer la valeur de l'angle dont le cosinus est donné par la formule

$$\cos x = \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}, \text{ avec } \alpha = 57^\circ\, 57'\, 57''.$$

Montpellier.

On donne la surface et la diagonale d'un parallélépipède rectangle. Calculer ses dimensions, sachant qu'elles sont en progression arithmétique, ou en progression géométrique.

NOTICE SUR VICTOR-ALEXANDRE PUISEUX

Victor-Alexandre PUISEUX naquit à Argenteuil près de Paris, le 16 avril 1820. Son père, receveur des contributions indirectes, fut appelé trois ans après à Longwy en Lorraine, et en 1826 à Pont-à-Mousson. C'est au collège de cette ville que le futur membre de l'Institut fit ses premières études. Les dispositions extraordinaires que le jeune élève montrait pour les sciences déterminèrent ses parents à l'envoyer finir ses études à Paris : à l'âge de 14 ans, il vint occuper une petite chambre, rue Saint-Jacques : c'est là qu'il se livrait au travail avec une incroyable ardeur, ne connaissant guère d'autres distractions que de longues promenades à pied et de fréquentes visites à son frère aîné qui était déjà élève de l'École normale (section des Lettres). L'année suivante il entra comme élève boursier au collège Rollin.

En 1836, âgé seulement de 16 ans, Victor Puiseux terminait ses Mathématiques spéciales, et sollicitait une dispense d'âge pour se présenter à l'École normale. M. Cousin, alors Ministre, la lui refusa ; mais il regretta sa décision, en le voyant, cette année même, obtenir le premier prix de physique au grand Concours. On lui offrit alors de le nommer élève de l'École, par décret spécial ; mais il refusa à son tour, déclarant qu'il voulait entrer à l'École par la grande porte. Un an après, le prix de Mathématiques spéciales constatait de nouveau sa supériorité, et les portes de l'École s'ouvraient devant lui ; il s'y maintint toujours au premier rang. Après ses trois années d'études, reçu le premier à l'agrégation des sciences, il obtint de passer encore une année à Paris, où il perfectionna ses études mathématiques en même temps qu'il était chargé d'une Conférence aux élèves de l'École normale.

Envoyé comme professeur de Mathématiques spéciales au collège royal de Rennes, il y fit un stage de trois ans, puis il fut chargé d'une chaire de Mathématiques que

l'on venait de créer à la Faculté de Besançon. C'est à cette époque qu'il enrichit le *Journal de Liouville* de notes remarquables par la rigueur des méthodes et l'élégance des démonstrations.

Dans le tome VII de ce journal, sous le titre de Géométrie, il établit par une analyse élégante et habile que l'hélice est la seule courbe dont la courbure et la torsion sont invariables dans tous les points. Bientôt après, étudiant le mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère, il justifiait par le calcul une circonstance particulière qui se présente dans les oscillations du pendule conique et dont la théorie générale n'avait pas encore rendu raison. Dans les volumes suivants du même recueil, il traitait diverses questions de mécanique relatives à la cycloïde, aux courbes tautochrones ; dans le tome XI, il donnait pour la première fois l'expression générale de la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique. En même temps que d'autres géomètres, il s'occupa dans le tome XII du beau théorème de Gauss : « *Si l'on déforme une surface flexible, le produit des rayons de courbure principaux, en chaque point, n'est pas altéré* » ; il en donna une démonstration directe, très simple, tirée de considérations classiques et élémentaires.

Appelé en 1849 à l'École normale en qualité de Maître de conférences, il propagea dans plusieurs générations de jeunes professeurs les saines traditions de rigueur et de clarté dont il offrait lui-même le plus parfait modèle. En 1853 il fut appelé comme astronome à l'Observatoire, qu'il quitta en 1859, pour se consacrer tout entier à l'enseignement et à ses travaux personnels. Il avait été pendant quelques années suppléant de Sturm et de Leverrier à la Faculté des sciences, de Binet au Collège de France ; en 1857, il remplaça, comme professeur titulaire de Mécanique céleste à la Sorbonne, l'illustre Cauchy, dont il avait été l'élève, l'admirateur et l'ami. En 1868, il devint membre du Bureau des Longitudes et quitta définitivement l'enseignement de l'École normale.

Il avait publié plusieurs travaux importants, surtout celui

relatif à la théorie des fonctions, qui fit sensation et lui valut les éloges de Cauchy et sur lequel M. Ch. Hermite, un des juges les plus compétents, a prononcé le jugement suivant (Comptes rendus, t. XXXII, p. 458). « *Les propositions données par M. Puiseux sur les racines des équations algébriques considérées comme fonctions d'une variable* z *qui entre rationnellement dans leur premier membre, me semblent ouvrir un vaste champ de recherches destinées à jeter un grand jour sur la nature analytique de ce genre de quantités.* » Et M. Hermite montrait en effet, dans un travail extrêmement remarquable, combien la théorie de M. Puiseux éclairait celle de la résolution des équations algébriques et de la division de l'argument dans les fonctions elliptiques. Il fit paraître des mémoires relatifs au mouvement des corps solides de révolution, à la théorie de la Lune.

Tous ces remarquables travaux avaient depuis longtemps attiré sur V. Puiseux l'attention de l'Académie : présenté comme candidat par la section de Géométrie, il ne fut, par suite de la guerre franco-allemande, élu qu'en 1871. Tous les concurrents se retirèrent spontanément, et par une exception aussi rare que glorieuse, il recueillit l'unanimité des suffrages, « *sans une seule voix dissidente ni une seule abstention* », comme l'a dit M. J. Bertrand.

Signalons encore ici divers travaux de V. Puiseux (*Journal de Liouville*, t. XIII) : Du mouvement d'un solide de révolution posé sur un plan horizontal ; même journal, t. XVII ; Solution de quelques questions relatives au mouvement d'un corps solide pesant posé sur un plan horizontal.

En 1872, il publia dans les *Annales scientifiques de l'Ecole Normale* (t. Ier, 2me série) un beau Mémoire intitulé : De l'équilibre et du mouvement des corps pesants en ayant égard aux variations d'intensité et de direction de la pesanteur.

Mentionnons également un autre Mémoire sur la convergence des séries qui se présentent dans la théorie du mouvement elliptique des planètes, et deux autres : Sur le développement en séries des coordonnées des planètes, et de la fonction perturbatrice (*Journal de Liouville*, t. XVI de la 1re série et t. V de la 2e).

Appelé par la confiance de l'Académie à faire partie de la commission dite « du passage de Vénus », il fut réellement l'âme des premières résolutions par les calculs immenses auxquels il se livra pour marquer les régions où l'on pourrait observer le phénomène, et pour éclairer la commission sur le choix qu'il convenait de faire entre elles : il construisit des cartes, indiqua quelles localités convenaient le mieux pour observer par la méthode de Halley, quelles stations il fallait plutôt choisir, si on voulait utiliser la méthode de de Lisle. C'est à lui que l'on doit encore les premières réductions du calcul des observations faites par les envoyés français dans les diverses stations.

Disons un mot d'un autre Mémoire de lui publié (1877-1878, 2e partie, p. 1) dans les *Annales de la Société scientifique* de Bruxelles : « *Note sur les polygômes qui sont à la fois inscrits dans un cercle et circonscrits dans un autre cercle.* » Dans ce petit travail, Puiseux reprend par une voie simple et élémentaire un problème traité autrefois par Jacobi, et lié intimement au problème de multiplication de l'argument dans les fonctions elliptiques. Il donne une méthode ingénieuse pour déterminer directement les degrés de polynômes entiers qui jouent un rôle important dans la question, et en déduit un assez bon nombre de conséquences curieuses.

Dans ces derniers temps, malgré les souffrances cruelles, souvent intolérables, que lui causait la maladie qui l'a emporté, il avait accepté la tâche ingrate de surveiller la nouvelle édition des œuvres de Laplace, entreprise sous les auspices de l'Académie des sciences ; 5 volumes sont aujourd'hui publiés.

Nous avons parlé du savant; quant au professeur, nul plus que lui n'apporta la rigueur et la clarté dans son enseignement; tous ceux qui l'ont entendu peuvent l'attester. V. Puiseux n'était pas seulement mathématicien : intelligence parfaitement équilibrée, il s'intéressait sérieusement à une foule de questions. Dès sa première jeunesse, il avait cultivé avec bonheur les langues étrangères et la botanique. Ces aptitudes variées le désignèrent à la sortie de ses études à l'attention du célèbre naturaliste Auguste Saint-Hilaire, dont il suivait alors assidûment les cours. Puiseux accepta avec empresse-

ment la proposition qui lui fut faite d'accompagner son maître en Norwège, où ils entreprirent l'exploration botanique du pays; ils poussèrent jusqu'à Drontheim; la saison avancée ne leur permit pas d'aller plus loin. V. Puiseux eut toujours un goût extraordinaire pour les voyages, surtout les voyages dans les montagnes. Les Alpes avaient particulièrement ses préférences: vingt fois il les parcourut, non pas seulement en simple touriste, comme on pourrait le croire, mais en véritable explorateur. En 1848, il fut le premier qui atteignit le sommet de la pointe des Ecrins (4,103 m.) (voir Whymper, *Scrambles amongst the Alps*); il fut, on le comprend, un des premiers fondateurs du Club alpin français.

Chez Victor Puiseux l'homme privé n'était pas moins digne de servir de modèle que le savant : étranger à l'esprit d'intrigue, à l'ambition personnelle, son indifférence pour les honneurs allait jusqu'à l'apathie. Il pensait que c'est au pouvoir à distinguer le vrai mérite et non point à celui-ci à venir s'offrir. A l'un de ses amis qui venait le féliciter sur sa nomination au grade d'officier de la Légion d'honneur, il fit cette réponse si modeste et si simple : « Oh! dit-il, ces distinctions ne me sont agréables que par le plaisir qu'elles font à mes amis. » La simplicité, la douceur, la régularité de sa vie ont frappé tous ceux qui l'ont approché : il ne connaissait d'autre bonheur que le travail, la contemplation des beautés de la nature, les joies pures de la famille. V. Puiseux avait épousé en 1849 la fille de M. Jeannet, alors proviseur du lycée de Versailles : six enfants complétèrent cette union basée sur les sentiments les meilleurs et les plus élevés. Il eut la douleur de voir quatre d'entre eux et leur mère le précéder dans la tombe. Deux fils seulement, deux fils dignes de lui, survivent aujourd'hui, et gardent pieusement la mémoire de ses vertus. Eux seuls pourraient témoigner à quel point sa tendresse paternelle a été ingénieuse et persévérante. Doué d'aptitudes presque universelles, il dirigeait leurs études, leurs voyages, leurs amusements. Aucun devoir n'était indifférent à la conscience de Puiseux : aimant profondément son pays, on le vit en juin 1848, récemment nommé à la Faculté de Besançon,

quitter la toge de professeur pour le fusil de garde national et se rendre à Paris pour y concourir à la défense de l'ordre social. Il fit plus encore en 1870 : laissant dans le Midi ses jeunes enfants qu'il accompagnait en voyage de vacances, il vint s'enfermer dans Paris assiégé et donner à tous, dans les postes pénibles et périlleux des remparts, l'exemple de la fermeté et de l'abnégation.

Victor Puiseux était un homme de convictions profondément chrétiennes, mais il y joignait la tolérance la plus parfaite. A l'école il s'était lié avec Pierre Olivain, entré depuis dans la Compagnie de Jésus et tombé en 1871 sous les balles de la Commune. Ensemble ils donnaient aux œuvres de charité une partie de leurs jours de congé ; ensemble ils fondèrent une des Conférences de Saint-Vincent de Paul de Paris, aujourd'hui encore jeune et vivante, composée en grande partie d'élèves des Écoles et qui gardent fidèlement le souvenir de ses fondateurs.

Enfin, pour conclure, une bonté inépuisable, une charité active étaient comme l'âme de sa vie. Il venait à peine d'avoir la joie de marier son fils aîné, quand la mort est venue le prendre, le 9 septembre 1883, à Frontenay (Jura), dans la famille de sa belle-fille, et où, fidèle aux convictions de sa vie, il a donné aux siens le consolant spectacle d'une mort vraiment chrétienne.

Un vieil ami et camarade d'école.

QUESTIONS PROPOSÉES

138. — Soit yOx un angle, A un point pris sur Ox; par le point A on mène une droite AB, et par le point O une droite OP, telle que l'angle POy soit égal à l'angle BAx. Trouver le lieu géométrique du point d'intersection de AB et de OP lorsque l'angle BAx varie. *(L. Lévy.)*

139. — Mener par un point donné A une droite dont les distances à deux points donnés aient une somme donnée.

Discuter en faisant varier la position du point A dans le plan. (*L. Lévy.*)

140. — Si d'un point de la circonférence de diamètre AB, pour centre, on décrit une circonférence tangente à AB, les tangentes à cette circonférence issues des points A et B sont parallèles. (*L. Lévy.*)

141. — Construire un triangle sachant que la bissectrice coupe deux circonférences données sous des angles donnés, et que les côtés adjacents passent par les centres des deux circonférences. (*L. Lévy.*)

142. — Soient ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit; par O je mène une droite quelconque, qui coupe respectivement BC, CA, AB, en m, n, p. Soient m', n', p', les symétriques de m, n, p, par rapport à O; démontrer que les droites Am', Bn', Cp' se coupent sur le cercle circonscrit à ABC. — Généraliser le théorème par projection et en déduire la construction par points d'une ellipse dont on connaît le centre et trois points. (*E. Lemoine.*)

143. — On considère un cercle Δ et deux diamètres rectangulaires AB et CD ; d'un point M mobile sur Δ, on abaisse une perpendiculaire MP, sur AB. Par le point P on mène des parallèles aux droites CA et CB et l'on joint MC. Cette droite MC rencontre les parallèles en question aux points R et Q. Trouvez le lieu décrit par le milieu de RQ.

Ce lieu est un cercle. (*G. L.*)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 6052-4.

SUR LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

DONNÉE

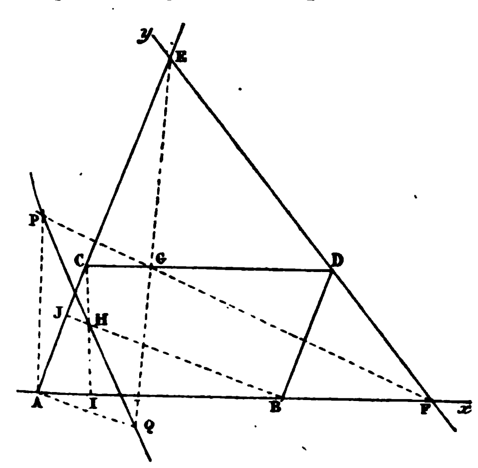
AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE FORESTIÈRE, EN 1883

Par M. **Picquet**, répétiteur à l'École polytechnique.

Étant donné un parallélogramme ABCD, *dont les côtés* AB, AC *sont fixes de position, mais variables quant à leurs longueurs, de telle sorte que le sommet* D *décrive une droite fixe* EF, *trouver le lieu décrit par le point de rencontre* H *des hauteurs du triangle* ABC.

A chaque point D *de la droite* EF *correspond ainsi un point du lieu; établir cette correspondance pour les différentes régions de la droite* EF *dans le cas général, et spécialement dans le cas où l'angle* A *est un angle droit.*

La première partie de la question avait été donnée à l'intention de tous les candidats; elle a en effet été traitée par un grand nombre d'entre eux avec plus ou moins d'élégance, suivant qu'ils possédaient ou non l'usage des déterminants.



Prenant pour axes de coordonnées obliques les côtés AB, AC du parallélogramme et désignant leur angle par θ, si

$$ax + by + c = o$$

est l'équation de la droite EF, et si α et β sont les coordonnées variables du point D, on voit immédiatement que les hau-

teurs CH, BH ont pour équations

$$x + (y - \beta) \cos \theta = 0,$$
$$(x - \alpha) \cos \theta + y = 0.$$

On a de plus

$$a\alpha + b\beta + c = 0.$$

Éliminant α et β entre ces équations, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & -\cos\theta & x + y\cos\theta \\ -\cos\theta & 0 & x\cos\theta + y \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

ou, en supprimant le facteur cos θ,

$$x(a \cos \theta + b) + y(a + b \cos \theta) + c \cos \theta = 0,$$

équation qui représente une ligne droite PQ.

La seconde partie de la question, destinée à différencier les candidats, n'a établi entre eux aucune distinction, attendu que personne ne l'a traitée; et l'objet de cette note est de leur indiquer la marche qu'ils devaient suivre.

Si le point D vient en E, le point H vient au point Q, où la perpendiculaire élevée en A à l'axe Ay rencontre la perpendiculaire abaissée de E sur l'axe Ax. De même si D vient en F, H vient au point P où la perpendiculaire AP à l'axe Ax rencontre la perpendiculaire abaissée de F sur l'axe Ay. C'est ce qu'il est, d'ailleurs, facile de vérifier par le calcul. La droite demandée est donc *la seconde diagonale du parallélogramme* APGQ *dont les côtés sont perpendiculaires aux axes et dont deux sommets opposés sont le point* A *et le point de rencontre des hauteurs* G *du triangle* AEF : et l'on voit alors aisément que si le point D décrit successivement les segments ∞ E, EF, F ∞, sur la droite donnée, le point H décrit respectivement les segments ∞ P, PQ, P ∞, sur la droite trouvée.

Si l'angle θ devient droit et si l'on applique encore au point D la construction qui donne le point H, pour tout point D de la droite donnée, on trouve l'origine A; cependant, si l'on fait cos $\theta = 0$ dans l'équation de la droite PQ, elle devient

$$bx + ay = 0$$

qui représente la droite menée par l'origine symétriquement par rapport à la perpendiculaire à EF. Or, si l'on applique

à un point quelconque de cette droite la construction inverse qui permet de déduire le point D du point H, on trouve que le point D correspondant est à l'infini. Si donc on trouve une droite et non pas seulement l'origine, cela tient à ce que le point à l'infini sur la droite donnée donne lieu à une infinité de points H à distance finie, tandis que tous les points à distance finie ne fournissent que l'origine.

Il est facile d'ailleurs de se rendre compte de la direction particulière trouvée dans ce cas pour la droite PQ. Le quadrilatère inscriptible BCIJ donne en effet

$$AJ \times AC = AI \times AB,$$

d'où

$$\frac{AJ}{AI} \times \frac{AC}{AB} = 1.$$

Mais, lorsque θ tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\frac{AJ}{AI}$ tend vers le coefficient angulaire de la droite qui joint l'origine à un point du lieu ; $\frac{AC}{AB}$ est le coefficient angulaire de la droite qui joint l'origine au point correspondant de la droite donnée; ce qui prouve que *le produit des coefficients angulaires des droites qui joignent l'origine à deux points correspondants tend vers l'unité.* Supposant le point D à l'infini sur EF, on en conclut alors pour la droite PQ la direction indiquée par le calcul.

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 49.)

XXVI

On donne un triangle ABC; *lieu des points* O *tels que si par* O *on mène*

OA_c *parallèle à* BC *et terminé en* A_c *sur* AC,
OC — AB — C_a *sur* AC,

on ait

$$\frac{CC_a}{AA_c} = l,$$

l *étant un rapport donné.*

Soit K le point du lieu situé sur BC; k le point de AC tel que Kk soit parallèle à AB;

Soit H le point du lieu situé sur AB; h le point de AC tel que Hh soit parallèle à BC;

Soit μ le point du lieu situé sur AC.

La réciproque du théorème des transversales montre facilement que H, K, μ sont en ligne droite, je dis que cette droite est le lieu cherché. En effet : soit O un point de cette droite, OA_c, OC_a les lignes construites comme l'indique l'énoncé.

On a

$$\frac{CC_a}{AA_c} = \frac{\mu C + \mu C_a}{\mu A + \mu A_c}; \qquad (a)$$

mais μ étant un point du lieu on a facilement

$$\mu C = \frac{l}{l+1}.b \qquad (1)$$

$$\mu A = \frac{1}{l+1}.b \qquad (2)$$

Soit

$$\frac{\mu C_a}{\mu A} = \frac{O\mu}{\mu H} = j,$$

on a

$$\mu C_a = j.\mu A = \frac{j.b}{l+1}; \qquad (3)$$

mais alors

$$\frac{\mu A_c}{\mu h} = \frac{O\mu}{\mu H} = j,$$

donc

$$\mu A_c = j.\mu h = j(Ah - A\mu) = \frac{j.b}{l(l+1)}. \qquad (4)$$

De (1), (2), (3), (4), substitués dans (a), on tire

$$\frac{CC_a}{AA_c} = \frac{\frac{l}{l+1}.b + \frac{j.b}{l+1}}{\frac{1}{l+1}.b + \frac{j.b}{l(l+1)}} = l.$$

Le point O jouit donc de la propriété considérée; on démontre immédiatement que tout point qui n'est pas sur la droite HKμ ne jouit pas de cette propriété: le lieu est donc la droite HKμ. C. Q. F. D.

Appelons L cette droite.

Nous laissons aux élèves à démontrer:

1° *Que, quel que soit* l, *la droite* HKμ *passe par le symétrique de* B *par rapport au milieu de* AC.

2° *Que, si par* O *on mène une parallèle à* AC *coupant* BC *en* B_c

—	—	AB	—	—	C_b
—	—	AC	—	AB	B_a
—	—	BC	—	—	A_b

et que l'on cherche le lieu des points O *tels que* $\frac{BB_c}{CC_b} = m$, m *étant un rapport donné, lieu qui est une droite que nous appelons* M ; *et le lieu des points* O *tels que* $\frac{AA_b}{BB_a} = n$, n *étant un rapport donné, lieu qui est une droite que nous appelons* N ; *les trois lieux* L, M, N *concourront en un même point si l'on a* $l.m.n = 1$.

XXVII

Étant donné un triangle ABC, *trouver dans son plan un point tel qu'en menant par ce point des parallèles aux trois côtés, les longueurs de ces parallèles comprises entre les côtés du triangle soient proportionnelles aux carrés des côtés auxquels elles sont parallèles.*

Première solution. — Soient A_c, A_b les points où la parallèle à BC menée par O coupe AC et AB;

Soient B_a, B_c les points où la parallèle à AC menée par O coupe AB et CB;

Soient C_b, C_a les points où la parallèle à AB menée par O coupe CB et AC.

On a par l'énoncé

$$\frac{A_cA_b}{a^2} = \frac{B_cB_a}{b^2} = \frac{C_aC_b}{c^2} = \rho;$$

mais on sait que

$$\frac{A_cA_b}{BC}+\frac{B_aB_c}{AC}+\frac{C_aC_b}{AB}=2;$$

donc

$$a\rho+b\rho+c\rho=2$$

ou

$$\rho=\frac{1}{p}$$

par suite

$$A_bA_c=\frac{a^2}{p}$$

$$B_cB_a=\frac{b^2}{p}$$

$$C_aC_b=\frac{c^2}{p}$$

Il est facile de démontrer que la distance d'un sommet à la parallèle menée par ce point au côté opposé est égale au diamètre du cercle inscrit; par conséquent ce point est celui que nous avons désigné par ω, et dont nous avons étudié les propriétés (voir *Journal de Mathématiques spéciales*, 1883, page 49 et suivantes).

On peut démontrer aussi le théorème suivant:

Les trois triangles $C\omega_1B$, $C\omega_1A$, $A\omega_1B$ *sont respectivement proportionnels à* $p-a$, $p-b$, $p-c$.

Il y a d'autres points qui répondent à la question.

Ainsi nous sommes partis de l'égalité

$$\frac{A_cA_b}{BC}+\frac{B_aB_c}{AC}+\frac{C_aC_b}{AB}=2;$$

mais si nous étions partis de l'égalité

$$\frac{B_aB_c}{AC}+\frac{C_aC_b}{AB}-\frac{A_cA_b}{BC}=2;$$

nous aurions trouvé

$$\rho\alpha=\frac{1}{p-a},$$

$\rho\alpha$ représentant la valeur commune des rapports

$$\frac{A_cA_b}{a^2}=\frac{B_aB_c}{b^2}=\frac{C_aC_b}{c^2},$$

on trouverait ainsi un point pour lequel m aurait

$$A_bA_c = \frac{a^2}{p-a},$$
$$B_aB_c = \frac{b^2}{p-a},$$
$$C_aC_b = \frac{c^2}{p-a}.$$

On verrait facilement que la distance d'un sommet à la parallèle menée par ce point au côté opposé est égale au diamètre du cercle ex-inscrit de rayon r_a, par conséquent *(loc. cit.)* ce point est celui que nous avions étudié en le désignant par ω_a, etc. Les quatre points ω_1, ω_a, ω_b, ω_c sont donc tels si par chacun de ces points on mène des parallèles aux trois côtés, les parties de ces parallèles comprises entre les côtés du triangle sont proportionnelles aux carrés des côtés.

Deuxième solution. — Proposons-nous de déterminer géométriquement le point ω_1 d'une autre façon que par les constructions indiquées *(loc. cit.)*.

On a

$$\frac{CC_a}{AC} = \frac{C_aC_b}{AB} \text{ ou } \frac{CC_a}{b} = \frac{C_aC_b}{c}$$
$$\frac{AA_c}{AC} = \frac{A_bA_c}{BC} \text{ ou } \frac{AA_c}{b} = \frac{A_bA_c}{a};$$

d'où

$$\frac{CC_a}{AA_c} = \frac{C_aC_b}{A_bA_c} \cdot \frac{a}{c} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a}{c} = \frac{c}{a}.$$

D'après le problème XXVI $\left(\text{c'est le cas de } l = \frac{c}{a}\right)$, le point ω_1 appartient à une droite facile à déterminer ; pour la construire il faut prendre sur CB, à partir de C dans le sens CB, la longueur $CA_1 = AB$ et joindre A_1 au symétrique de B par rapport au milieu de AC.

Le point ω_1 appartient encore à une autre droite analogue qui est le lieu des points caractérisés par l'égalité

$$\frac{AA_b}{BB_a} = \frac{a}{b}.$$

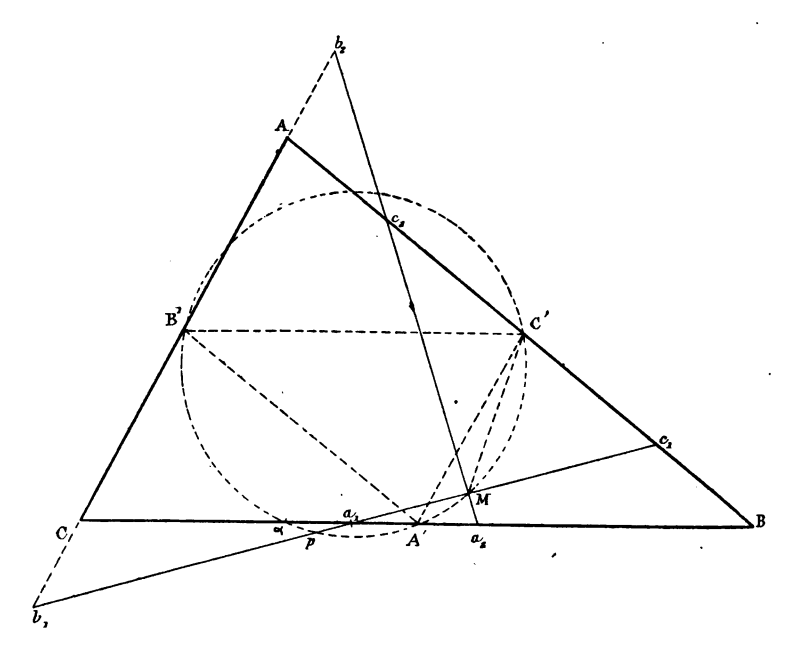
Il est donc déterminé.



Une méthode semblable s'applique à la construction des points ω_a, ω_b, ω_c.

XXVIII

Soit M *un point du cercle des neuf points du triangle* ABC, *soit un angle droit ayant son sommet en* M *et dont les côtés coupent* BC *en* a_1, a_2, *tels que le milieu de la droite* a_1a_2 *soit aussi le milieu* A′ *de* BC, *je dis que la droite* Ma_1 *coupera* AC *en* b_1, AB *en* c_1, *que la droite* Ma_2 *coupera* AC *en* b_2, AB *en* c_2 *de façon que les milieux de* b_1b_2, c_1c_2 *coïncident respectivement avec les milieux* B′ *et* C′ *de* AC *et de* AB.



Démontrons par exemple que $C'c_1 = C'c_2$, ou, puisque c_2Mc_1 est rectangle, que $MC'c_1$ est isoscèle, ou enfin que angle $C'c_1M =$ angle $C'Mc_1$.

On a

$$C'c_1M = c_1Ba_1 + Ba_1c_1 = C'B'A' + Ba_1c_1;$$

c'est-à-dire que, si p et α sont les points où Ma_1 et BC



coupent le cercle des neuf points, l'angle $C'c_1M$ a pour mesure $\frac{1}{2}$ C'MA' $+ \frac{1}{2}$ MA' $+ \frac{1}{2}$ $p\alpha$.

L'angle $C'Mc_1$ a pour mesure $\frac{1}{2}$ C'M $+ \frac{1}{2}$ MA'p ou $\frac{1}{2}$ C'MA' $+ \frac{1}{2}$ A'p.

Mais comme par hypothèse dans le triangle rectangle a_1Ma_2 on a $a_1A' =$ A'M, les 2 angles $A'a_1M$, a_1MA' sont égaux; donc leurs mesures $\frac{1}{2}$MA' $+ \frac{1}{2}$ $p\alpha$ et $\frac{1}{2}$ A'p sont égales.

La mesure de $C'Mc_1$ est donc $\frac{1}{2}$ C'MA' $+ \frac{1}{2}$ MA' $+ \frac{1}{2}$ $p\alpha$, c'est-à-dire la même que celle de $C'c_1M$. Ces deux angles étant égaux, le théorème est démontré.

XXIX

Soit un triangle ABC ;

Soient l_a *le plus court chemin entre un point* O *de son plan et le sommet* A *après avoir touché* BC, l_b *le plus court chemin entre* O *et* B *après avoir touché* AC, l_c, *etc.* ;

Trouver : 1° Le point O *pour lequel* $l_a + l_b + l_c$ *est un minimum ;*

2° Le lieu des points pour lesquels la somme $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2$ *est égale à un carré donné ;*

3° Le point pour lequel cette somme de carrés est minima.

Ces questions paraissent fort complexes, mais une remarque très simple va en donner la solution immédiate.

Soient A', B', C' les symétriques des sommets par rapport aux côtés opposés; on a évidemment

$$l_a = OA'$$
$$l_b = OB'$$
$$l_c = OC'$$

de sorte que le point O pour lequel $l_a + l_b + l_c$ est un minimum est le point pour lequel la somme des distances aux trois points A', B', C' est minimum ; c'est comme l'on sait le point d'où l'on voit les trois côtés de A'B'C' sous

le même angle si aucun des angles de ce triangle n'est supérieur à 120 degrés, etc. Le lieu des points pour lesquels $l_a + l^b + l_c^2$ est égal à un carré donné est une circonférence qui a pour centre le centre de gravité du triangle A'B'C', ce centre de gravité est le point du plan pour lequel la somme $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2$ est minimum.

Nous engageons les élèves à discuter ces problèmes.

Le minimum de $l_a + l_b + l_c$ est :

$$\sqrt{2T\sqrt{3} + \frac{1}{2}\left[a^2 + b^2 + c^2 + \left(\frac{4S}{R}\right)^2\right]}$$

T, S, R représentant la surface de A'B'C', la surface de ABC et le rayon de cercle circonscrit à ABC;

Le minimum de $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2$ est :

$$\frac{1}{3}\left[a^2 + b^2 + c^2 + \left(\frac{4S}{R}\right)^2\right].$$

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

ET PLUS PETIT MULTIPLE COMMUN DES NOMBRES FRACTIONNAIRES

Par M. **P. Barrieu,** professeur au Lycée de Mont-de-Marsan.

(*Suite*, Voir p. 54.)

Théorème VI. — *Si l'on multiplie ou si l'on divise plusieurs fractions par un même nombre, entier ou fractionnaire, leur plus grand commun diviseur et leur plus petit multiple commun sont multipliés ou divisés par ce nombre.*

Considérons d'abord les fractions irréductibles $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$ ..., et voyons ce que devient leur plus grand commun diviseur quand on multiplie tous les numérateurs par un nombre premier α.

Si le facteur premier α n'est contenu dans aucun des dénominateurs, les fractions $\frac{a\alpha}{b}$, $\frac{a'\alpha}{b'}$, $\frac{a''\alpha}{b''}$, . . . sont irréductibles.

Mais le facteur premier α a été introduit dans tous les numérateurs; donc le plus grand commun diviseur des numérateurs est multiplié par α, tandis que le plus petit multiple commun des dénominateurs n'a pas changé. Le plus grand commun diviseur des fractions est donc multiplié par α.

Si au contraire le facteur premier α entre dans un ou plusieurs des dénominateurs, les fractions $\frac{a\alpha}{b}, \frac{a'\alpha}{b'}, \frac{a''\alpha}{b''}, \ldots$ réduites à leur plus simple expression, conformément à la règle du n° 1, n'auront plus α facteur commun des numérateurs, et d'autre part l'exposant de α aura diminué d'une unité dans tous les dénominateurs. Le plus grand commun diviseur des numérateurs n'aura donc pas changé, tandis que le plus petit multiple commun des dénominateurs aura été divisé par α. Donc le plus grand commun diviseur des fractions sera encore multiplié par α.

Ainsi dans tous les cas, en multipliant tous les numérateurs par le facteur premier α, on multiplie le plus grand commun diviseur des fractions par α.

Si maintenant, après avoir réduit à leur plus simple expression les fractions $\frac{a\alpha}{b}, \frac{a'\alpha}{b'}, \frac{a''\alpha}{b''}, \ldots$, nous multiplions de nouveau tous les numérateurs par α, ou par tout autre facteur premier, le plus grand commun diviseur des fractions sera de nouveau multiplié par α, ou par cet autre facteur premier, et ainsi de suite.

Il résulte de là que, si nous multiplions tous les numérateurs par les facteurs premiers qui composent un entier p, le plus grand commun diviseur des fractions sera multiplié par p.

On démontrerait de même que si l'on multiplie tous les dénominateurs par un entier q, le plus grand commun diviseur des fractions est divisé par q.

On a donc

$$D\left(\frac{ap}{bq}, \frac{a'p}{b'q}, \frac{a''p}{b''q}, \ldots\right) = \frac{p}{q} . D\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots\right)$$

et, en remplaçant les fractions irréductibles par les frac-

tions égales :

$$D\left(\frac{A.P}{B.Q}, \frac{A'.P}{B'.Q}, \frac{A''.P}{B''.Q}, \ldots\right) = \frac{P}{Q}.D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right). \quad (9)$$

C. Q. F. D.

On démontrerait de la même manière l'identité

$$m\left(\frac{A.P}{B.Q}, \frac{A'.P}{B'.Q}, \frac{A''.P}{B''.Q}, \ldots\right) = \frac{P}{Q}.m\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right). \quad (10)$$

Corollaire I. — *Si l'on divise plusieurs fractions par leur plus grand commun diviseur, les quotients ainsi obtenus sont premiers entre eux.*

En effet, d'après la définition même du diviseur, ces quotients sont entiers, et de plus leur plus grand commun diviseur est l'unité puisqu'il est égal au plus grand commun diviseur des fractions divisé par lui-même.

Corollaire II. — *Si l'on divise le plus petit multiple commun de plusieurs fractions par chacune d'elles, les quotients ainsi obtenus sont premiers entre eux.*

En effet, posons

$$\mu = m\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right)$$

nous avons d'après le théorème VI

$$D\left(\frac{\mu B}{A}, \frac{\mu B'}{A'}, \frac{\mu D''}{A''}, \ldots\right) = \mu . D\left(\frac{B}{A}, \frac{B'}{A'}, \frac{B''}{A''}, \ldots\right)$$

$$= \frac{\mu}{m\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right)} \text{(v.th.V)}$$

$$= 1$$

C. Q. F. D.

Théorème VII. — *Le plus grand commun diviseur de plusieurs fractions est égal à un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, divisé par le plus petit multiple commun des quotients obtenus en divisant ce nombre par chacune des fractions.*

En effet, on a d'après le théorème VI :

$$m\left(\frac{K.B}{A}, \frac{K.B'}{A'}, \frac{K.B''}{A''}, \ldots\right)$$

$$= K.m\left(\frac{B}{A}, \frac{B'}{A'}, \frac{B''}{A''}, \ldots\right)$$

$$= \frac{K}{D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}\right)} \text{ ; (Voir théorème V)}$$

d'où

$$D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right)$$

$$= \frac{K}{m\left(\frac{K\,.\,B}{A} . \frac{K\,.\,B'}{A'}, \frac{K\,.\,B''}{A''}, \ldots\right)}. \qquad (11)$$

Corollaire I. — *Le plus grand commun diviseur de plusieurs fractions est égal à un multiple commun quelconque* M *divisé par le plus petit multiple commun des quotients obtenus en divisant* M *par chacune des fractions.*

Car en faisant K = M dans la formule (11) on a

$$D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right)$$

$$= \frac{M}{m\left(\frac{M\,.\,B}{A}, \frac{M\,.\,B'}{A'}, \frac{M\,.\,B''}{A''}, \ldots\right)}. \qquad (12)$$

Corollaire II. — *Le plus grand commun diviseur de* n *fractions est égal à leur produit divisé par le plus petit multiple commun des produits obtenus en combinant ces fractions* (n — 1) *à* (n — 1).

Car, en prenant pour K le produit $P = \frac{A}{B} . \frac{A'}{B'} . \frac{A''}{B''}, \ldots$

on a

$$D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right) = \frac{P}{m\left(\frac{P\,.\,B}{A}, \frac{P\,.\,B'}{A'}, \frac{P\,.\,B''}{A''}, \ldots\right)}$$

$$= \frac{P}{m\left(\frac{P}{\frac{A}{B}}, \frac{P}{\frac{A'}{B'}}, \frac{P}{\frac{A''}{B''}}, \ldots\right)} \qquad (13)$$

Théorème VIII. — *Le plus petit multiple commun de plusieurs fractions est égal à un nombre quelconque, entier ou frac-*

tionnaire, divisé par le plus grand commun diviseur des quotients obtenus en divisant ce nombre par chacune des fractions.

En effet, on a, d'après le théorème VI,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{K}\,.\,\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, \frac{\mathrm{K}\,.\,\mathrm{B}}{\mathrm{A}'}, \frac{\mathrm{K}\,.\,\mathrm{B}}{\mathrm{A}''}, \ldots\right) &= \mathrm{K}\,.\,\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, \frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{A}'}, \frac{\mathrm{B}''}{\mathrm{B}''}, \ldots\right) \\ &= \frac{\mathrm{K}}{m\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}, \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{B}'}, \frac{\mathrm{A}''}{\mathrm{B}''}, \ldots\right)}; \end{aligned}$$

d'où

$$m\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}, \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{B}'}, \frac{\mathrm{A}''}{\mathrm{B}''}, \ldots\right) = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{K.B}}{\mathrm{A}}, \frac{\mathrm{K.B}'}{\mathrm{A}'}, \frac{\mathrm{K.B}''}{\mathrm{A}''}, \ldots\right)} \qquad (14)$$

Corollaire I. — *Le plus petit multiple commun de plusieurs fractions est égal à un multiple commun quelconque* M *divisé par le plus grand commun diviseur des quotients obtenus en divisant* M *par chacune des fractions.*

Car, pour $\mathrm{K} = \mathrm{M}$, l'identité (14) devient

$$m\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}, \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{B}'}, \frac{\mathrm{A}''}{\mathrm{B}''}, \ldots\right) = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{M.B}}{\mathrm{A}}, \frac{\mathrm{M.B}'}{\mathrm{A}'}, \frac{\mathrm{M.B}''}{\mathrm{A}''}, \ldots\right)} \qquad (15)$$

Corollaire II. — *Pour qu'un multiple commun à plusieurs fractions soit le plus petit, il faut et il suffit qu'en divisant ce multiple par chacune des fractions les quotients obtenus soient premiers entre eux dans leur ensemble.*

En effet, l'égalité (15) montre que pour que l'on ait

$$\mathrm{M} = m\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}, \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{B}'}, \frac{\mathrm{A}''}{\mathrm{B}''}\right),$$

il faut et il suffit que

$$\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{M.B}}{\mathrm{A}}, \frac{\mathrm{M.B}'}{\mathrm{A}'}, \frac{\mathrm{M.B}''}{\mathrm{A}''}, \ldots\right) = 1$$

ou, en d'autres termes, que les quotients $\frac{\mathrm{M.B}}{\mathrm{A}}, \frac{\mathrm{M.B}'}{\mathrm{A}'}, \frac{\mathrm{M.B}''}{\mathrm{A}''}, \ldots$ soient premiers entre eux.

Corollaire III. — *Le plus petit multiple commun de* n *fractions est égal à leur produit divisé par le plus grand commun diviseur des produits obtenus en combinant ces fractions* (n — 1) *à* (n — 1).

En effet, en prenant pour K le produit

$$P = \frac{A}{B} \cdot \frac{A'}{B'} \cdot \frac{A''}{B''}, \ldots$$

on a

$$m\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right) = \frac{P}{D\left(\frac{P.B}{A}, \frac{P.B'}{A'}, \frac{P.B''}{A''}, \ldots\right)}$$

$$= \frac{P}{D\left(\frac{P}{\frac{A}{B}}, \frac{P}{\frac{A'}{B'}}, \frac{P}{\frac{A''}{B''}}, \ldots\right)} \qquad (16)$$

Théorème IX. — *Le produit de* n *fractions est égal au plus petit multiple commun des produits obtenus en combinant ces fractions* i *à* i *multiplié par le plus grand commun diviseur des produits obtenus en les combinant* (n — i) *à* (n — i).

En effet, considérons les produits obtenus en combinant n fractions i à i; le produit P des n fractions est évidemment un multiple commun des produits ainsi obtenus; et les produits obtenus en divisant P par chacun d'eux sont les produits des n fractions combinées $(n - i)$ à $(n - i)$. Si donc nous convenons de désigner par $m\,(C_n^i)$, $D\,(C_n^i)$ le plus petit multiple commun et le plus grand commun diviseur des produits obtenus en combinant n fractions i à i, nous aurons, d'après le théorème VIII :

$$m\,(C_n^i) = \frac{P}{D\,(C_n^{n-i})};$$

d'où

$$P = m\,(C_n^i).\,D\,(C_n^{n-i}). \qquad (17)$$

Théorème X. — *Pour qu'un diviseur commun à plusieurs fractions soit le plus petit, il faut et il suffit qu'en divisant chacune des fractions par ce diviseur, les quotients obtenus soient premiers entre eux dans leur ensemble.*

En effet, soit δ un diviseur commun quelconque des fractions $\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}$. ... Nous avons, d'après le théorème VI,

$$D\left(\frac{A}{B.\delta}, \frac{A'}{B'.\delta'}, \frac{A''}{B''.\delta''}, \ldots\right) = \frac{D\left(\frac{A}{B}, \frac{A}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right)}{\delta}$$

Donc pour que $\delta = D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \ldots\right)$, il faut et il suffit que

$$D\left(\frac{A}{B.\delta}, \frac{A'}{B'.\delta}, \frac{A''}{B''.\delta}, \ldots\right) = 1$$

ou, en d'autres termes, que les quotients $\frac{A}{B.\delta}, \frac{A'}{B'.\delta}, \frac{A''}{B''.\delta}, \ldots$ soient premiers entre eux.

Théorème XI. — *Si l'on élève plusieurs fractions à la puissance* p, *leur plus grand commun diviseur et leur plus petit multiple commun sont élevés à cette puissance.*

En effet, si les fractions $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \ldots$ sont irréductibles, les fractions $\frac{a^p}{b^p}, \frac{a'^p}{b'^p}, \ldots$ le sont aussi, et l'on a, en appliquant à ces fonctions le théorème I,

$$D\left(\frac{a^p}{b^p}, \frac{a'^p}{b'^p}, \ldots\right) = \frac{D(a^p, a'^p, \ldots)}{m(b^p, b'^p, \ldots)} \qquad (10)$$

$$= \frac{\{D(a, a', \ldots)\}^p}{\{m(b, b', \ldots)\}^p}$$

$$= \left\{D\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \ldots\right)\right\}^p$$

et, en remplaçant les fractions irréductibles par les fractions égales,

$$D\left(\frac{A^p}{B^p}, \frac{A'^p}{B'^p}, \ldots\right) = \left\{D\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \ldots\right)\right\}^p \qquad (18)$$

On démontrerait de même que

$$m\left(\frac{A^p}{B^p}, \frac{A'^p}{B'^p}, \ldots\right) = \left\{m\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \ldots\right)\right\}^p \qquad (19)$$

Conclusion. — De l'étude précédente il résulte que les propriétés du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun sont les mêmes pour les nombres entiers et pour les nombres fractionnaires. On pourra donc faire usage de ces propriétés sans s'occuper de la nature des nombres sur lesquels on opère. — En particulier, quelles que soient les valeurs entières ou fractionnaires aux lettres $a, b, c, \ldots$ on aura toujours les identités suivantes :

$$D(a,b,c,\ldots) = D[D(a,b),c,\ldots] \qquad m(a,b,c,\ldots) = m[m(a,b),c,\ldots]$$

$$D(a,b,c,\ldots)\,.\,m\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c},\ldots\right) = 1 \qquad m(a,b,c,\ldots)\,.\,D\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c},\ldots\right) = 1$$

$$D(ak,bk,ck,\ldots) = K\,.\,D(a,b,c,\ldots) \qquad m(ak,bk,ck,\ldots) = K\,.\,m(a,b,c,\ldots)$$

$$D(a,b,c,\ldots) = \frac{M}{m\left(\frac{M}{a},\frac{M}{b},\frac{M}{c},\ldots\right)} \qquad m(a,b,c,\ldots) = \frac{M}{m\left(\frac{M}{a},\frac{M}{b},\frac{M}{c},\ldots\right)}$$

$$D(a,b,c,\ldots) = \frac{P}{m\left(\frac{P}{a},\frac{P}{b},\frac{P}{c},\ldots\right)} \qquad m(a,b,c,\ldots) = \frac{P}{D\left(\frac{P}{a},\frac{P}{b},\frac{P}{c},\ldots\right)}$$

$$D(a^p,b^p,c^p,\ldots) = \{D(a,b,c,\ldots)\}^p \qquad m(a^p,b^p,c^p,\ldots) = \{m(a,b,c,\ldots)\}^p$$

$$P = D(C_n^i)\,.\,m(C_n^{n-i}).$$

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Besançon.

On donne un cercle en papier très mince et très flexible, de rayon OA $= 1$. Dans ce cercle, on découpe un secteur AOB avec lequel on forme un cône de révolution en réunissant les rayons extrêmes OA, OB. On demande : 1° quel est en degrés, minutes et secondes l'angle AOB quand AB $= 1$, et quelle est alors la surface du secteur; 2° les expressions générales de la surface latérale, de la surface totale et du volume du cône, ainsi que la position de son centre de gravité; comment varient ces expressions avec l'arc AB. Calculer les valeurs pour AB $= 1$.

— On donne un rectangle ABCD; on fait tourner le triangle ADC autour de la diagonale AC jusqu'à ce qu'il

vienne en D'AC, en faisant un angle x avec ABC. On demande d'exprimer en fonction de x : 1° le volume du tétraèdre ABCD'; 2° la surface totale; 3° la distance du sommet D' au centre de gravité de la base opposée.

— Un trapèze ABB'A', dont les angles A' et B' sont droits, est défini par les trois dimensions $AA' = a$; $BB' = b$; $B'A' = c$; on prend sur A'B' un point M tel que $\frac{MA'}{MB'} = \frac{a}{b}$; on tire MA et MB; calculer la surface du triangle ABM et le volume engendré par ce triangle en tournant autour de A'B'. Déterminer ensuite les trois quantités a, b, c, de façon : 1° que l'angle AMB soit droit; 2° que la surface ABM soit égale à m^2; 3° que le volume engendré par le triangle soit égal à $\frac{2}{3}\pi n^3$.

Lille.

Un corps du poids de 75 kilog. tombe d'une hauteur de $1^m,30$ sur un sol qui oppose à la continuation de son mouvement une résistance constante de 5000 kilog. Jusqu'à quelle hauteur s'y enfoncera-t-il?

Marseille.

Résoudre et construire un triangle rectangle connaissant le périmètre et la hauteur abaissée sur l'hypoténuse. Discussion.

— On a un triangle ABC d'une surface de 16 mètres carrés; on prend sur la base AC un point D tel que $AD = \frac{AC}{4}$, et on tire BD; sur la droite DB, on prend un point E tel que $DE = \frac{DB}{4}$; puis on mène AE, EC. Calculer la surface des triangles AEC, AEB, BEC.

Montpellier.

On donne dans un triangle la surface S, l'angle C, et l'on sait que $a + b - c = k$; calculer les côtés a, b, c et les angles A, B.

Toulouse.

Par les extrémités de deux rayons OB, OC d'une circonférence donnée, on mène les tangentes BA, CA, qui se coupent en A. Exprimer en fonction du rayon R et de la projection BE de l'arc CFB sur OB les volumes des corps engendrés : 1° par le segment BCFG; 2° par le triangle BOC; 3° par le triangle curviligne BFCA, lorsque ces trois figures tournent autour de OB. Cas particulier où BE est égal à BO, c'est-à-dire où l'angle BOC est droit. On représentera BE par a.

Grenoble.

Étudier la variation de la fraction

$$\frac{x^2 - 1}{5x^2 + 4x},$$

et déterminer en particulier: 1° les maxima et minima de cette fonction; 2° les valeurs de x pour lesquelles la fonction est négative.

Nancy.

Soit ABC un triangle rectangle isoscèle, l'angle B étant droit; par le point A, on mène dans le plan du triangle la droite AD, qui fait avec AB l'angle α; on demande, en fonction de α, le volume engendré par le triangle tournant autour de AD. — Discussion.

Dijon.

Résoudre l'équation

$$\sin 5x = \sin 7x.$$

— Deux cercles variables sont respectivement inscrits dans un angle donné et sont opposés au sommet, et la somme de leurs aires reste égale à la constante S. Cela posé, on demande d'exprimer en fonction de α et de S la valeur de la distance mutuelle de leurs centres quand elle est minima.

VARIÉTÉS

*Nous donnerons très prochainement à nos lecteurs une analyse de l'ouvrage important dont M. Maximilien Marie vient de faire paraître les quatre premiers volumes, sur l'*Histoire des sciences mathématiques et physiques. *En attendant, nous reproduisons ici une partie relative à la troisième période, d'*Hipparque *à* Diophante, *sur l'algèbre des géomètres grecs.*

Voici, il nous semble, comment l'algèbre pouvait, dès l'antiquité, être instituée dans son office essentiel, qui est de donner le moyen de formuler des lois, sans qu'il fût nécessaire pour cela de recourir à l'intervention d'aucun artifice étranger.

Proposition I.

On obtient le rapport de deux grandeurs de même espèce au moyen des opérations qui en fournissent la plus grande commune mesure.

Si deux grandeurs A et B ont pour plus grande commune mesure une grandeur M, et que cette plus grande commune mesure y soit respectivement contenue a fois et b fois, A est a fois la b^{me} partie de B, et le rapport de A à B est $\frac{a}{b}$. En même temps, le rapport de B à A est $\frac{b}{a}$.

Si les opérations instituées pour obtenir la plus grande commune mesure entre A et B devaient se prolonger indéfiniment, comme il arrive lorsque l'on compare la diagonale d'un carré à son côté, les deux grandeurs A et B seraient incommensurables, et leur rapport ne pourrait pas être formulé exactement.

Définition. — Le rapport de deux grandeurs A et B est dit égal à celui de deux autres grandeurs C et D, lorsque les deux séries, finies ou indéfinies, d'opérations instituées pour obtenir la plus grande commune mesure entre A et B d'une

part, entre C et D de l'autre, fournissent la même suite de quotients, de sorte que deux restes de mêmes rangs soient toujours respectivement contenus le même nombre de fois dans les restes précédents.

Proposition II.

Si l'on arrête successivement les opérations de la recherche de la plus grande commune mesure entre deux grandeurs A et B après la première, après la seconde, etc., et que l'on prenne les expressions approchées du rapport, en considérant successivement comme nuls le premier reste, le second, etc., ces expressions sont alternativement trop petites ou trop grandes.

En effet, supposons que l'on ait trouvé, par exemple

$$\begin{aligned} A &= 2B + R, \\ B &= 3R + R_1, \\ R &= 4R_1 + R_2, \\ R_1 &= 2R_2 + R_3, \\ R_2 &= 5R_3 + R_4; \end{aligned}$$

négligeons le reste R_4, et concevons la grandeur A' qui, comparée à B, donnerait

$$\begin{aligned} A' &= 2B + R', \\ B &= 3R' + R'_1, \\ R' &= 4R'_1 + R'_2, \\ R'_1 &= 2R'_2 + R'_3, \\ R'_2 &= 5R'_3. \end{aligned}$$

Ces égalités donnent successivement

$$\begin{aligned} R'_1 &= 10R'_3 + R'_3 = 11R'_3, \\ R' &= 44R'_3 + 5R'_3 = 49R'_3, \\ B &= 147R'_3 + 11R'_3 = 158R'_3, \\ A' &= 316R'_3 + 49R'_3 = 365R'_3. \end{aligned}$$

A' vaudrait donc 365 fois la 158e partie de B.

Négligeons maintenant le reste R_3, concevons la grandeur A'', qui comparée à B donnerait

$$\begin{aligned} A'' &= 2B + R'', \\ B &= 3R'' + R''_1, \\ R'' &= 4R''_1 + R''_2, \\ R''_1 &= 2R''_2. \end{aligned}$$

On tirera de ces égalités

$$R'' = 9R''_2,$$
$$B = 29R''_2,$$
$$A'' = 67R''_2;$$

de sorte que le rapport de A″ à B serait $\frac{67}{29}$.

Mais, si l'on s'était servi des égalités primitives, le calcul étant identiquement le même, on aurait trouvé

$$A = 365R_3 + 67R_4$$

et

$$B = 158R_3 + 29R_4;$$

or, le rapport

$$\frac{365R_3 + 67R_4}{158R_3 + 29R_4},$$

étant formé des rapports

$$\frac{365R_3}{158R_3} \text{ et } \frac{67R_4}{29R_4}$$

ajoutés termes à termes, est compris entre les deux ; la valeur exacte du rapport est donc comprise entre deux de ses valeurs approchées consécutives.

Cela posé, la première valeur approchée du rapport fournie par l'annulation du premier reste R serait évidemment trop petite ; donc la seconde serait trop grande, la troisième trop petite, etc.

Plus généralement les valeurs approchées du rapport fournies par l'annulation des restes de rangs impairs, sont trop petites et les autres trop grandes.

Proposition III.

Toutes les valeurs approchées du rapport sont irréductibles, puisque chacune d'elles est fournie par les nombres de fois que deux grandeurs commensurables contiennent respectivement leur plus grande commune mesure.

Proposition IV.

Considérons trois valeurs approchées consécutives du rapport, et, pour cela, supposons que, si l'on eût continué les opérations commencées sur A et B, on eût trouvé

$$R_3 = 6R_4 + R_5;$$

la troisième valeur approchée du rapport que l'on obtiendrait en négligeant R_5, se formera en remplaçant R_3 par $6R_4$ dans l'expression

$$\frac{365R_3 + 67R_4}{158R_3 + 29R_4},$$

ce qui donnera

$$\frac{365 \times 6R_4 + 67R_4}{158 \times 6R_4 + 29R_4},$$

ou

$$\frac{365 \times 6 + 67}{158 \times 6 + 29};$$

d'où résulte la règle suivante :

Si

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \quad \frac{P_n}{Q_n} \quad \text{et} \quad \frac{P_{n+1}}{Q_{n-1}}$$

représentent trois valeurs consécutives approchées du rapport, et si a désigne le nombre de fois que le dernier reste employé est contenu dans l'avant-dernier,

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}.$$

Proposition V.

On conclut de là, par des opérations portant simplement sur des nombres entiers, que la différence entre deux valeurs consécutives approchées du rapport,

$$\frac{P_n}{Q_n} \quad \text{et} \quad \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

est toujours

$$\frac{1}{Q^n \cdot Q_{n-1}},$$

qu'elle va donc toujours en diminuant ; que, par conséquent, une valeur approchée de rang impair est moindre qu'une valeur approchée de rang pair; que les valeurs approchées de rang impair vont en augmentant et les autres en diminuant; enfin que l'erreur commise en prenant une valeur approchée du rapport pour sa valeur exacte, décroît indéfiniment lorsque le rang de cette valeur approchée croît suffisamment.

(M. Marie, *Histoire des Sciences math. et phys.*, tome Ier.)

QUESTIONS PROPOSÉES

144. — Soit ABC un triangle, A′ et A″ les pieds sur BC des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A ; B′ et B″, C′ et C″ les points analogues sur AC et sur AB. Soient α' et α'' les symétriques de A′ et A″ par rapport au milieu de BC ; β' et β'' les symétriques de B′ et B″ par rapport au milieu de AC ; γ' et γ'' les symétriques de C′ et C″ par rapport au milieu de AB. Démontrer :

1° Que les trois circonférences décrites sur A′A″, B′B″, C′C″ comme diamètres ont même axe radical ;

2° Qu'il en est de même des trois circonférences décrites sur $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ comme diamètres ;

3° Que ces trois dernières circonférences se coupent, se touchent ou ne se coupent pas, suivant que ABC est acutangle, rectangle ou obtusangle ; lorsqu'elles se touchent, le point de contact est le point symétrique du sommet de l'angle droit par rapport au milieu de l'hypoténuse ;

4° Lorsqu'elles se coupent ou se touchent, les distances d'un point d'intersection ou du point de contact aux trois sommets sont proportionnelles aux côtés opposés ;

5° Les axes radicaux des deux groupes de trois circonférences se coupent au centre du cercle circonscrit au triangle ABC. *(E. Lemoine.)*

145. — Démontrer qu'une corde Δ, normale à une parabole P, est égale à quatre fois la portion de la tangente Δ' parallèle à Δ, cette portion étant comptée depuis le point de contact jusqu'au point de rencontre de Δ' avec la directrice. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 9368-4

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 25.)

XXX

Dans un triangle ABC *déterminer un point* O *tel que si par ce point on mène des parallèles aux trois côtés, les longueurs des segments des côtés compris entre les parallèles soient proportionnelles à des longueurs données* q, r, s.

En adoptant les notations du problème XXVII on doit avoir

$$\frac{B_cA_b}{q} = \frac{A_cC_a}{r} = \frac{A_cB_a}{s}.$$

Première solution. — Posons

$$A_cA_b = x,$$
$$B_aB_c = y,$$
$$C_aC_b = z;$$

la condition du problème devient

$$\frac{a-x}{q} = \frac{b-y}{r} = \frac{c-z}{s} \qquad (1)$$

et comme l'on a d'ailleurs

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2, \qquad (2)$$

on obtient immédiatement x, y, z et le problème peut être considéré comme résolu.

Deuxième solution. — Je fais un triangle quelconque $O'B'_cC'_b$ semblable à OB_cC_b, c'est-à-dire à ACB.

Par O' je mène une parallèle à $B'_cC'_b$ et sur cette parallèle je prends A'_c et A'_b tels que si la parallèle à $O'B'_c$ menée par A'_c coupe $O'C'_b$ en C'_a, et que la parallèle à $O'C'_b$ menée par A'_b coupe $O'B'_c$ en B'_a, on ait

$$\frac{B'_cC'_b}{A'_cC'_a} = \frac{q}{r} \qquad \frac{B'_cC'_b}{A'_bB'_a} = \frac{q}{s},$$

ces deux parallèles se couperont en A′, et il n'y aura plus qu'à prendre dans ABC le point O homologue de O′ dans A′B′C′.

Dans ces deux solutions nous avons admis implicitement que x, y, z sont positifs ; mais en leur supposant des signes quelconques, il y a d'autres points du plan qui répondent à la question, et nous engageons les élèves à faire l'intéressante discussion qui permet de les trouver tous et de fixer leurs positions.

XXXI

Construire un triangle connaissant les longueurs l_a, l_b, l_c *des segments compris entre les côtés, des parallèles aux trois côtés menées par le centre du cercle inscrit à ce triangle.*

Ce problème est la question 863, que j'ai posée dans les *Nouvelles Annales*, en 1868. Voici une solution par le calcul; la solution insérée même année, page 451, était une solution géométrique.

Soient x, y, z les trois côtés BC, AC, AB; il est facile de calculer l_a, l_b, l_c en fonction de x, y, z; en trouve

$$l_a = \frac{x(y+z)}{x+y+z} = \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}};$$

$$l_b = \frac{y(x+z)}{x+y+z} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}};$$

$$l_c = \frac{z(x+y)}{x+y+z} = \frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}};$$

en posant

$$\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy} = \text{K}$$

on tire de là

$$\frac{1}{x} = \frac{\text{K}}{2}(l_b + l_c - l_a);$$

$$\frac{1}{y} = \frac{K}{2}(l_c + l_a - l_b);$$

$$\frac{1}{z} = \frac{K}{2}(l_a + l_b - l_c);$$

substituant dans la valeur de K, on en tire

$$K = \frac{4}{2l_b l_c + 2l_a l_c + 2l_a l_b - l_a^2 - l_b^2 - l_c^2},$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\,\frac{2l_b l_c + 2l_a l_c + 2l_a l_b - l_a^2 - l_b^2 - l_c^2}{l_b + l - l_a} \\ y &= \text{etc.} \end{aligned}\right\} (1)$$

On traiterait d'une façon analogue le cas où l'on donnerait les longueurs l'_a, l'_b, l'_c des parallèles menées par le centre du cercle ex-inscrit tangent au côté BC, etc.

On aurait ainsi

$$(2)\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\,\frac{2l'_a l'_b + 2l'_a l'_c - 2l'_b l'_c + l'^2_a + l'^2_b + l'^2_c}{l'_a + l'_b + l} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{M_a}{l'_a + l'_b + l'_c} \\ y &= \frac{1}{2}\cdot\frac{M_a}{l'_a + l'_b - l'_c} \\ z &= \frac{1}{2}\cdot\frac{M_a}{l'_a + l'_c - l'_b}. \end{aligned}\right.$$

etc.

Remarquons que si l'on pose

$$A = \frac{1}{2}(l_c + l_b - l_a),$$

$$B = \frac{1}{2}(l_a + l_c - l_b),$$

$$C = \frac{1}{2}(l_b + l_a - l_c),$$

On peut mettre les formules (1) sous la forme

$$x = \frac{AB + AC + CB}{A} = B + C + \frac{CB}{A},$$

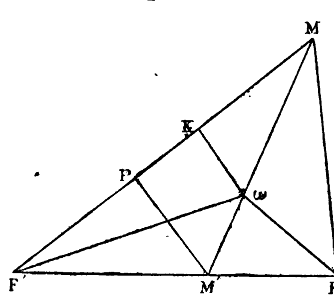
$$y = \frac{AB + AC + CB}{B} = A + C + \frac{AC}{B},$$

et faire une remarque analogue pour les formules (2).

XXXII

Dans une ellipse la projection, sur les rayons vecteurs partant des foyers de la partie de la normale comprise entre le point de la courbe et le grand axe, est constante.

Soit M le point de la courbe; MM′ la normale sur M terminée en M′ sur le grand axe; F et F′ les deux foyers; ω le centre du cercle inscrit au triangle F′MF; K et P les projections de ω et de M′ sur F′M; $2a$, $2b$, $2c$, le grand axe, le petit axe et la distance focale, on a



$$\frac{MK}{MP} = \frac{M\omega}{MM'}.$$

Mais comme Fω et F′ω sont les bissectrices des angles en F et en F′ des triangles M′FM, M′F′M, on a

$$\frac{M\omega}{\omega M'} = \frac{MF}{M'F} = \frac{MF'}{M'F'};$$

d'où

$$\frac{M\omega}{MM'} = \frac{MF}{MF + M'F} = \frac{MF'}{MF' + M'F'}.$$

d'où encore

$$\frac{M\omega}{MM'} = \frac{MF + MF'}{MF + M'F + MF' + M'F'} = \frac{2a}{2a + 2c}$$

On a donc

$$\frac{MK}{MP} = \frac{a}{a + c}. \qquad (1)$$

Mais MK est la tangente menée de M au cercle inscrit, c'est donc la moitié du périmètre du triangle MF′F diminuée de FF′ ou

$$\frac{1}{2}(2a + 2c) - 2c$$

ou

$$a - c;$$

on a enfin alors de (1)

$$MP = \frac{(a-c)(a+c)}{a} = \frac{b^2}{a},$$

Ce qu'il fallait établir.

Une démonstration tout à fait analogue s'applique à l'hyperbole et à la parabole.

XXXIII

Nous allons énoncer ici quelques propriétés du triangle dans un ordre où leur démonstration est assez facile, et nous engageons les élèves à prendre ces énoncés comme exercice.

Soit ABC *un triangle quelconque;*

A', A'', A_1 *respectivement les pieds sur* BC *de la bissectrice intérieure de* CAB, *de la bissectrice extérieure du même angle et le point symétrique de* A *par rapport au milieu de* BC;

B', B'', B_1, C', C'', C_1, *les points analogues par rapport aux autres côtés.*

Soit O *un point du plan,*

C_a *le point où la parallèle à* AB *menée par* O *coupe* AC,
B_a — — AC — — AB.

1° *Démontrer que si l'on a*

$$\frac{C_aC}{B_aB} = \frac{b^2}{c^2},$$

le point O *appartient soit à la droite* A_1A', *soit à la droite* A_1A'';

2° *Démontrer que les trois droites* A_1A', B_1B', C_1C' *se coupent en un même point* ω;

3° *Que les droites* A_1A'', B_1B'', C_1C' *se coupent en un même point* ω_c; *les droites* A_1A'', B_1B', C_1C'' *en* ω_b; *les droites* A_1A', B_1B'', C_1C'' *en* ω_a;

4° *Que les droites* $A\omega_a$, $B\omega_b$, $C\omega_c$ *se coupent en* I;

5° *Que les distances de* ω *aux trois côtés* BC, AC, AB *sont respectivement proportionnelles à* $b + c - \frac{bc}{a}$, $a + c - \frac{ac}{b}$, $a + b - \frac{ab}{c}$; *celles de* ω_a *aux mêmes côtés, à* $-\left(b + c + \frac{bc}{a}\right)$, $c - a + \frac{ac}{b}$, $b - a + \frac{ab}{c}$; *celles de* I, *à* $\frac{1}{a(ab + ac - bc)}$,

$\frac{1}{b(ab+bc-ac)}$, $\frac{1}{c(ac+cb-ab)}$;

6° *Que si par le point* ω *on mène des parallèles aux trois côtés, les parties de ces parallèles comprises entre deux côtés du triangle sont égales entre elles et à* $\frac{2abc}{ab+ac+bc}$; *soit* l *cette longueur;*

7° *Que les points* ω_a, ω_b, ω_c *jouissent de la même propriété que le point* ω, *les longueurs étant alors respectivement pour* ω_a, ω_b, ω_c $\frac{2abc}{ab+ac-bc} = l_a$, *etc ;*

(Les points ω, ω_a, ω_b, ω_c sont des points sur lesquels M. J. Neuberg a publié une note en 1881. (Voir *Mathesis*, 1881, page 149.)

8° *Que si nous formons le triangle qui a pour hauteurs* a, b, c, *les diamètres des cercles inscrits et ex-inscrits à ce triangle seront les longueurs* l, l_a, l_b, l_c ;

9° *Exprimer les distances de* ω, ω_a, ω_b, ω_c *aux trois côtés du triangle en fonction des hauteurs de* ABC, *par exemple la distance de* ω *à* BC *est :* $h_a \frac{h_b+h_c-h_a}{h_a+h_b+h_c}$, *etc.*;

10° *Ce qui montre que l'on peut construire ou calculer les côtés d'un triangle connaissant les trois distances d'un des points* ω, ω_a, ω_b, ω_c *aux trois côtés;*

(problème peu commode à aborder directement d'une autre façon.)

11° *L'on peut calculer ou construire les trois côtés de* ABC *connaissant trois des longueurs* l, l_a, l_b, l_c, *qui ont entre elles la relation* $\frac{1}{l} = \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c}$, *et remarquer plusieurs formules entre autres* ; $a = \frac{l_b l_c}{l_b + l_c}$.

12° *Si l'on a la relation :* $ab = ac + bc$, ω *est sur* BA *au pied de la bissectrice de l'angle* ACB, ω_c *est rejeté à l'infini,* ω_a *et* ω_b *sont respectivement sur* AC et BC *aux pieds des bissectrices extérieures.*

XXXIV

Construire un quadrilatère ABCD *connaissant les quatre côtés* AB, BC, CD, DA *et l'angle que les deux côtés opposés* AD *et* BC *font entre eux.*

Par A je mène une parallèle à BC;

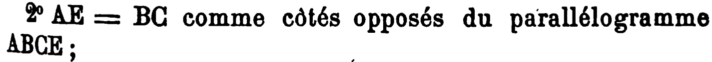
Par C je mène une parallèle à CAB;

Ces deux parallèles se coupent en E.

Je joins ED

Dans le triangle DAE je connais.

1° AD;



2° AE = BC comme côtés opposés du parallélogramme ABCE;

3° L'angle compris DAE qui est l'angle que les deux côtés opposés AD et BC font entre eux.

Je puis donc le construire.

Je connais alors les trois côtés du triangle DEC; je le construis et je n'ai plus qu'à terminer le parallélogramme AECB.

(A suivre.)

NOTE D'ALGÈBRE

La fraction rationnelle $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ mérite, pour beaucoup de raisons, un chapitre spécial dans le cours d'algèbre élémentaire; nous savons que déjà plusieurs professeurs se font un devoir d'exposer avec détail les propriétés spéciales de cette fonction simple; et nous nous proposons simplement de reproduire ici le programme de cette discussion, en insistant spécialement sur ce fait que les seules connaissances

préalablement exigées sont : la notion des grandeurs négatives, et la discussion de la fonction linéaire à une seule variable.

Cela posé, voici le programme de la discussion :

(a) Si $ab' - ba'$ n'est pas nul, l'expression rationnelle $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ est variable avec x;

(b) En désignant par y cette expression, chaque valeur d'x produit une valeur d'y, finie ou infinie ; et, inversement, chaque valeur finie ou infinie que l'on donne à y produit une et une seule valeur d'x ; il est utile de dire que x et y se correspondent *homographiquement ;*

(c) La fonction y peut s'écrire sous la forme

$$K \cdot \frac{x-\alpha}{x-\alpha'},$$

ce qui montre : que la fonction a un *zéro* et un infini, que le passage par zéro est accompagné d'un changement de signe ; que le passage par l'infini est aussi accompagné d'un changement de signe ; que ces deux changements de signe sont en sens inverse l'un de l'autre : si l'un se fait de $+$ à $-$, l'autre se fait de $-$ à $+$;

(d) La fonction ne présente d'autre discontinuité que son passage par l'infini ; dans chacun des deux intervalles où la fonction est continue, la différence $y_2 - y_1$ garde le même signe, tant que $x_2 - x_1$ garde le même signe ; en d'autres termes, la fonction y a un seul sens de variation, pendant que x va en croissant de $-\infty$ à $+\infty$.

Il en résulte que la fonction y prend une fois et une seule fois toute valeur positive ou négative, et peut, dans un grand nombre de questions, représenter utilement sous la forme

$$\frac{a\lambda + b}{a'\lambda + b'}$$

toute grandeur qui doit parcourir, sans omissions ni répétitions, toute l'échelle numérique, positive et négative.

(e) Enfin la relation

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$$

peut, par une division, s'écrire

$$y = \beta' + \frac{h}{x - \alpha'}$$

ou

$$(y - \beta')(x - \alpha') = h$$

d'où l'on conclut immédiatement, en coordonnées obliques ou rectangulaires, indifféremment, que les variations de la fonction y sont représentées par un tracé hyperbolique.

Nous ajouterons un seul mot: les variations de la fonction y mise sous la forme

$$\frac{a + \lambda a'}{1 + \lambda}$$

donnent un exemple heureusement choisi pour la discussion des solutions négatives, en traduisant, par les variations de λ, le déplacement continu d'un point sur une droite indéfinie.

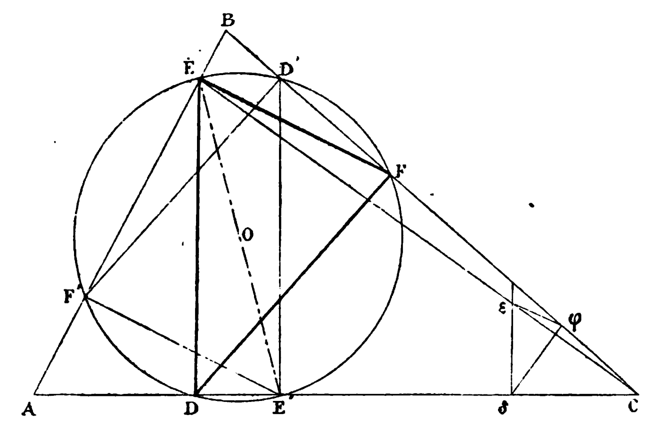
Le programme que nous venons de rédiger sera suivi de plusieurs autres sur des questions de mathématiques élémentaires; nous avons surtout pour but de montrer comment, selon nous, ces diverses questions doivent être traitées, sans troubler l'ordre simple et logique des idées, de manière à préparer nos jeunes lecteurs à l'étude des mathématiques supérieures; les principes et les règles de l'enseignement doivent être les mêmes partout; les applications seules doivent changer et s'étendre de plus en plus, à mesure qu'on avance dans l'étude des sciences mathématiques. Il faut, dès l'origine, faire pénétrer dans les jeunes intelligences la conviction qu'il y a en tout des lois, des méthodes générales de recherche et de raisonnement, que les *ficelles* sont méprisables quand elles ne résultent pas d'une application *intensive* des principes. Dans les sciences mathématiques, surtout dans l'enseignement et l'étude de ces sciences, l'imagination joue un rôle utile et nécessaire, mais en subordonnant son influence à celle des méthodes générales; ce qui suppose d'abord que ces méthodes, dites générales, ne doivent jamais comporter d'exceptions.

E. V.

QUESTION 5

Solution par M. Madiot, élève de l'Institution Sainte-Marie de Besançon.

A tout triangle ABC *on peut inscrire deux triangles ayant leurs côtés perpendiculaires à ceux de* ABC. *Ces deux triangles sont inscriptibles dans une circonférence ayant pour centre le centre des médianes antiparallèles de* ABC.



Traçons dans le triangle donné une droite $\delta\varphi$ perpendiculaire à l'un des côtés, à BC par exemple, et par les points φ et δ menons des perpendiculaires respectivement aux deux autres côtés.

Nous formons ainsi un triangle $\varepsilon\delta\varphi$, homothétique à l'un des triangles demandés, et le point C est un centre de similitude.

La droite $C\varepsilon$ rencontrant en E le côté AB, il n'y a plus qu'à mener des droites ED et EF parallèles à $\varepsilon\delta$ et à $\varepsilon\varphi$, puis à tirer DF.

La circonférence circonscrite au triangle DEF coupe en D', E', F' les côtés du triangle donné. Les angles EDE', FEF', DFD' étant droits, les points E et E', F et F', D et D' sont deux à deux diamétralement opposés et le triangle D'E'F'

a ses côtés égaux et parallèles à ceux de DEF; il a par conséquent ses côtés perpendiculaires à ceux de ABC.

On a DE'E = DFE comme angles inscrits dans un même segment.

Mais EFD = ABC, puisque ces angles ont leurs côtés perpendiculaires.

On a donc DE'E = ABC.

Les droites BC et EE' sont donc antiparallèles par rapport à l'angle A, d'où il suit que le centre O de la circonférence étant sur le milieu de EE' appartient à une droite antiparallèle à la médiane relative aux côtés BC par rapport à l'angle A.

Comme du reste ce point appartient de même à des antiparallèles à chacune des deux autres médianes, il se trouve à leur intersection commune.

QUESTION 43

Solution par M. Puig, élève au Lycée de Montpellier.

Trouver le maximum du produit $x^m y^n$, *sachant que les variables positives* x *et* y *sont liées par la relation*

$$x^p y^q + x^{p'} y^{q'} = K.$$

Supposons que l'on élève les quantités

$$x^p y^q,\ x^{p'} y^{q'},\ x^m y^n,$$

respectivement aux puissances λ, λ', μ, vérifiant les conditions

$$p\lambda + p'\lambda' = m\mu$$
$$q\lambda + q'\lambda' = n\mu. \qquad (1)$$

On sera alors ramené à trouver le maximum du produit

$$x^{m\mu} y^{n\mu},$$

ou

$$(x^p y^q)^\lambda \times (x^{p'} y^{q'})^{\lambda'},$$

de facteurs dont la somme est constante. On sait que, alors, on devra avoir

$$\frac{x^p y^q}{\lambda} = \frac{x^{p'} y^{q'}}{\lambda'}.$$

Or les quantités λ et λ' vérifiant les équations (1), on en tire

$$\frac{\lambda}{p'n - mq'} = \frac{\lambda'}{qm - np}.$$

Donc on aura pour la condition de maximum

$$\frac{x^p y^q}{p'n - mq'} = \frac{x^{p'} y^{q'}}{qm - np} \qquad (2)$$

ou

$$\frac{x^{p-p'}}{p'n - mq'} = \frac{y^{q'-q}}{qm - np}. \qquad (3)$$

De l'équation (2) on tirera

$$\frac{x^p y^q}{p'n - mq'} = \frac{x^{p'} y^{q'}}{qm - np} = \frac{K}{n(p' - p) - m(q' - q)}$$

et, par logarithmes, on en tirera x et y.

Si l'équation donnée était homogène, c'est-à-dire si l'on avait

$$p - p' = q' - q,$$

on tirerait de l'équation (3) le rapport $\frac{x}{y}$; posons

$$\frac{x}{y} = \alpha.$$

Alors on aurait

$$x = \alpha \sqrt[p+q]{\frac{K}{\alpha^q + \alpha^{q'}}}; \quad y = \sqrt[p+q]{\frac{K}{\alpha^q + \alpha^{q'}}}.$$

Dans le cas où l'on aurait

$$p'n - mq' = 0, \quad pn - mq = 0,$$

le rapport de x à y se présenterait sous la forme $\frac{0}{0}$; dans ce cas, il faudrait chercher le maximum d'une expression de la forme

$$(x^\beta y)^n,$$

sachant que l'on a

$$(x^\beta y)^q + (x^\beta y)^{q'} = K,$$

Il y aurait pour chaque valeur du produit $x^\beta y$ que l'on pourrait tirer de cette équation, une valeur de la quantité

considérée; mais le maximum dépendrait de celui de la quantité

$$x^\beta y,$$

et les conditions données ne permettent pas de déterminer ce maximum.

QUESTION 72

Solution par M. PAUL BOURGAREL, à Antibes.

Résoudre le système

$$xy(x + y) = ab(a + b),$$
$$(x - y)(x + 2y)(2x + y) = (a - b)(a + 2b)(2a + b).$$

Je remarque d'abord la solution évidente

$$x = a, \quad y = b.$$

Je pose ensuite

$$x = at, \quad y = bt,$$

t étant une inconnue auxiliaire.

La première équation devient alors

$$t^3(a + b)ab = ab(a + b)$$

ou

$$t^3 - 1 = 0.$$

On remarque que la deuxième équation devient aussi $t^3 - 1 = 0$. Par conséquent, nous avons pour t les trois valeurs :

$$t = 1, \quad t = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad t = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2},$$

et par suite, pour x et y les trois valeurs :

$$x = a, \quad x = a\left[-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right], \quad x = a\left[-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right]$$
$$y = b, \quad y = b\left[-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right], \quad y = b\left[-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right]$$

Solution incomplète

autres solutions $x = b \quad y = -(a+b)$

$x = -(a+b) \quad y = a$

QUESTION 79.

Solution par M. PAUL BOURGAREL, à Antibes.

Mener dans un triangle une transversale tangente au cercle inscrit au triangle et détachant un triangle de surface donnée.

Soit ABC un triangle et O le cercle inscrit au triangle.

Supposons le problème résolu. Soit MN la tangente demandée, P le point de contact et $\frac{1}{2}m^2$ la surface donnée.

Posons

$$AM = x, \quad AN = y, \quad BAC = \alpha.$$

Nous aurons tout d'abord

$$xy \sin \alpha = m^2. \qquad (1)$$

On a aussi

$$MN^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha.$$

Or

$$MN = MQ + NR = 2AQ - (AM + AN),$$
$$MN = 2(p - a) - (x + y).$$

On a donc pour résoudre la question les deux équations

$$xy \sin \alpha = m^2, \qquad (1)$$
$$[2(p - a) - (x + y)]^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha. \qquad (2)$$

Développons, et réduisons la seconde équation; il vient

$$xy(1 + \cos \alpha) - 2(p - a)(x + y) + 2(p - a)^2 = 0,$$

ce que l'on peut écrire

$$m^2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} - 2(p - a)(x + y) + 2(p - a)^2 = 0$$

On connaît donc xy et $x + y$.

On a

$$x + y = p - a + \frac{m^2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}{2(p - a)}.$$

Ce qui peut s'écrire, en appelant r le rayon du cercle inscrit,

$$x + y = p - a + \frac{m^2}{2r};$$

x et y sont donc données par l'équation

$$Z^2 - \left(p - a + \frac{m^2}{2r}\right)Z + \frac{m^2}{\sin\alpha} = 0.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. F. Taratte, à Évreux; Naura, à Vitry-le-François; de Kerdrel, à Brest; Berdier, à Blanzac; Aubry, à Douai; Villademoros, à Paris; Voignier, à Commercy.

QUESTION 88

Solution par M. PAUL BOURGAREL, à Antibes.

Étant donnée la série illimitée

$$7, 13, 25, 43, 67, 97, 133, 175, \ldots$$

dont le terme général, celui qui en a n *avant lui, est*

$$x_n = 3(n^2 + n) + 7,$$

démontrer les propositions suivantes :

1. *Sur cinq termes consécutifs, pris à volonté dans la série, un terme est divisible par* 5.
2. *Sur sept termes consécutifs, deux sont divisibles par* 7.
3. *Sur treize termes consécutifs, deux sont divisibles par* 13.
4. *Aucun terme de la série n'est égal à un cube.*
5. *Une infinité de termes, tels que*

$$x_2 = 25,\ x_{37} = 4225,\ etc\ldots$$

sont des carrés divisibles par 25.

Le terme général de la série est

$$x_n = 3(n^2 + n) + 7 = 3n(n+1) + 7.$$

On peut donc former la série de la manière suivante:

Sur une première ligne horizontale (I), on écrit la suite naturelle des nombres entiers précédée de zéro.

Sur une seconde ligne (II), on écrit le produit de chacun des nombres de la ligne (I) par celui qui le suit.

Sur une troisième ligne, on écrit le triple de chacun des nombres de la ligne (II).

Enfin, sur une quatrième ligne, on écrit les nombres de la ligne (III), augmentés de 7 unités. La série est alors contenue dans la ligne (IV).

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,...	(I)
0,	2,	6,	12,	20,	30,	42	(II)
0,	6,	18,	36,	60,	90,	126	(III)
7,	13,	25,	43,	67,	97,	133	(IV)

1. — Sur cinq termes consécutifs, pris à volonté dans la série, un terme est divisible par 5.

En effet, considérons cinq termes consécutifs de la ligne (I); parmi ces cinq termes, il y en a un divisible par 5. Soit n ce terme. Le terme $n - 3$ de la ligne (I) a comme correspondant dans la ligne (IV), le nombre

$$3(n - 3)(n - 2) + 7 = 3n(n - 5) + 25,$$

c'est-à-dire un multiple de 5.

2.— Sur sept termes consécutifs, deux sont divisibles par 7. En effet, considérons sept termes consécutifs de la ligne (I); parmi ces sept termes, il y en a un divisible par 7; soit n ce terme. Les termes n et $n - 1$ de la ligne (I) ont comme correspondants dans la ligne (IV) les termes

$$3n(n + 1) + 7$$

et

$$3(n - 1)n + 7$$

qui sont tous deux des multiples de 7.

3. — Sur treize termes consécutifs, deux sont divisibles par 13. En effet, considérons treize termes consécutifs de la ligne (I); parmi ces treize termes, il y en a un divisible par 13; soit n ce terme. Les termes $n - 12$ et $n - 2$ de la ligne (I) ont comme correspondants dans la ligne (IV) les termes

$$3(n - 12)(n - 11) + 7$$

et

$$3(n - 2)(n - 1) + 7,$$

c'est-à-dire

$$3n(n - 23) + 403$$

et

$$3n(n - 3) + 13$$

qui sont tous deux des multiples de 13.

4. — Aucun terme de la série n'est égal à un cube. Il suffit de prouver pour cela que l'équation

$$3n^2 + 3n + 7 - a^3 = 0 \qquad (1)$$

n'admet pas de racines entières.

Il suffit pour cela de prouver que la quantité

$$9 - 12(7 - a^2)$$

n'est pas un carré parfait. Cette quantité est égale à

$$12a^2 - 75 = 2^2 \times 3 \,.\, a^2 - 3 \times 5^2.$$

Pour que ce nombre soit un carré, il faut qu'on puisse le mettre sous la forme d'un produit de facteurs affectés d'exposants pairs. Or, le facteur 3 est à la première puissance. Ce nombre n'est donc pas carré parfait. L'équation (1) n'admet donc pas de racines entières.

5. — Une infinité de termes tels que

$$x_2 = 25, \; a_{37} = 4225, \text{ etc.}$$

sont des carrés divisibles par 25. Il suffit de prouver pour cela que l'équation

$$3n^2 + 3n + 7 - 25\,K^2 = 0 \qquad (2)$$

peut admettre des racines entières.

Considérons la quantité

$$9 - 12(7 - 25K^2)$$

et voyons si cette quantité peut être carré parfait. Cette quantité est égale à

$$12 \times 25 \,.\, K^2 - 75 = 25 \times 3(4K^2 - 1);$$

$4K^2 - 1$ peut être divisible par 3, et le quotient de $4K^2 - 1$ par 3 peut alors être carré parfait; l'expression considérée peut être carré parfait, et par suite l'équation (2) peut admettre des racines entières.

QUESTION 95

Solution, par M. A. de Kerdrel, à Kéruzaret.

De chaque sommet A, B, C *d'un triangle comme centre on décrit des cercles de rayons* ρ_1, ρ_2, ρ_3, *tels que l'on ait*

$$\frac{\rho_2 + \rho_3}{a} = \frac{\rho_1 + \rho_3}{b} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{c}.$$

Lieu des centres radicaux de ces circonférences. (Lemoine.)

Soient ω, ω', ω'' trois points quelconques du lieu; b, b', b'' leurs projections sur CA; a, a', a'' leurs projections sur CB; soient λ, λ', λ'' les trois valeurs correspondantes des rapports précédents. D'après la théorie des axes radicaux on a

$$CA = \frac{b^2 + \rho_1^2 - \rho_3^2}{2b} = \frac{b^2 + \lambda b(\rho_1 - \rho_3)}{2b}.$$

Or

$$\rho_1 - \rho_3 = (c - a)\lambda.$$

Donc

$$Ca = \frac{b + \lambda^2(c - a)}{2};$$

de même,

$$Ca' = \frac{b + \lambda'^2(c - a)}{2}, \qquad Ca'' = \frac{b + \lambda'' b(c - a)}{2}.$$

Donc

$$aa' = \frac{(\lambda^2 - \lambda'^2)(c - a)b}{2}, \qquad a'a'' = \frac{(\lambda'^2 - \lambda''^2)c(c - a)}{2}$$

et

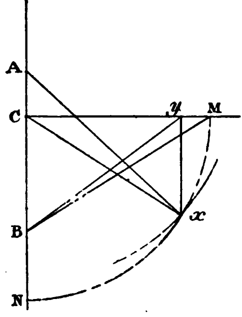
$$\frac{aa'}{a'a''} = \frac{\lambda^2 - \lambda'^2}{\lambda'^2 - \lambda''^2},$$

valeur indépendante des côtés; elle sera donc la même, quel que soit le côté que l'on considère. Par suite, les trois points ω, ω', ω'' sont en ligne droite. Il en est de même pour des valeurs quelconques de λ; le lieu est donc une droite.

QUESTION 107

Solution par M. E. Vigarié, élève au Lycée de Toulouse.

On a deux droites rectangulaires AB *et* CD*; sur* ACB *on prend de part et d'autre du point* C *les longueurs* CA $= a$, CB $= b$; *on demande de mener par le point* C, *dans l'angle* BCD, *une droite* Cx *de longueur* c, *telle que si on abaisse la perpendiculaire* xy *sur* CD *on ait*



$$Ax^2 - By^2 = xy^2.$$

Je suppose le problème résolu, soit Cx la droite. Le point x se trouve d'abord sur un arc de cercle MxN décrit du point C comme centre avec la longueur c pour rayon. Les deux triangles rectangles Bcy, xyC donnent

$$By^2 = Cy^2 + CB^2,$$
$$xy^2 = Cx^2 - Cy^2.$$

Par suite

$$Ax^2 - Cy^2 - CB^2 = Cx^2 - Cy^2$$

ou bien

$$Ax^2 = c^2 + b^2$$

Ax est donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant c et b pour côtés; si donc je joins B et M, on aura

$$BM = Ax.$$

Le point x se trouvera donc aussi sur un arc de cercle décrit du point A comme centre avec BM pour rayon; il se trouvera donc à l'intersection x des deux arcs de cercle et Cx sera la droite demandée.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Aubry, à Douai; de Kerdrel, à Brest; Chapron, à Versailles; Berthelot, à Orléans.

QUESTION 108

Solution par M. MADIOT, institution Sainte-Marie, à Besançon

On considère un angle droit XOY *et un cercle* Δ *inscrit dans cet angle. Par le point* O, *on mène une transversale* δ *qui rencontre* Δ *en* A *et* B; *on projette alors les points* A *et* B *sur* OX *en* A′ *et* B′ *et sur* OY *en* A″ *et* B″. *Ceci fait, sur* A′B′ *on décrit un demi-cercle* Δ' *et sur* A″B″ *un demi-cercle* Δ'', *et par le point* O *on mène à* Δ' *une tangente* OP *et à* Δ'' *une tangente* OQ; *enfin on rabat* OP *sur* OX *en* OP′ *et* OQ *en* OQ′ *sur* OY. *Les parallèles aux droites* OX *et* OY *menées par les points* Q′ *et* P′ *se coupent en un point* I *dont on demande le lieu, lorsque* δ *tourne autour du point* O. (G. L.)

On a, puisque A et B sont sur le cercle Δ, qui touche en E′ et E″ les lignes OX et OY

$$OA.OB = R^2.$$

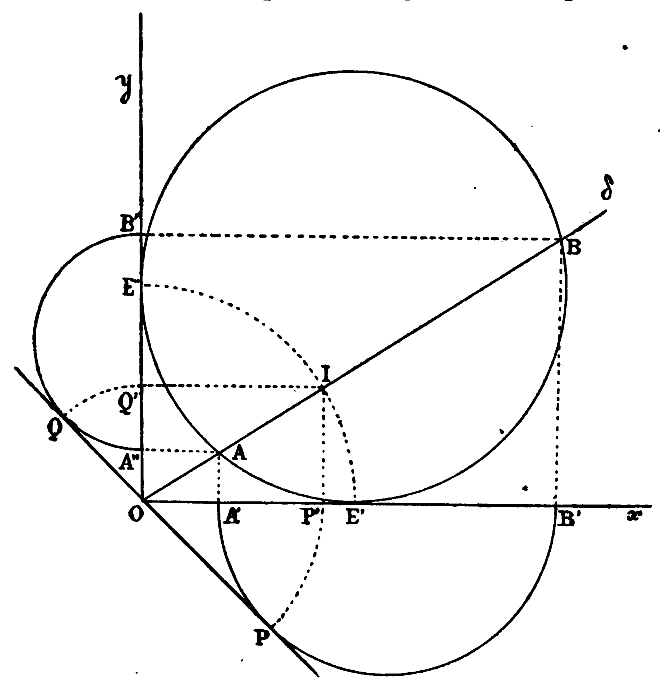
Soit α l'angle BOX; on a

$$OA' = OA \cos \alpha; \qquad OB' = OB \cos \alpha;$$

donc

$$OA.OA' = QP'^2 = R^2 \cos^2 \alpha;$$

si donc par le point P′ je mène une parallèle à OY, elle rencontrera OAB en un point I′ tel que OI′ sera égal à R.



De même, on a

$$OA' = OA \sin \alpha\,; \qquad OB' = OB \sin \alpha.$$

par suite

$$OA'.OB' = OQ'^2 = R^2 \sin^2 \alpha\,;$$

la droite menée par Q′ parallèlement à OA rencontrera donc OAB au même point I′ que précédemment; par conséquent :

Les droites Q′I, P′I se coupent toujours sur la sécante δ, en un point distant de O d'une longueur égale à R. Lorsque la droite δ tourne autour de O, le point I décrit un arc de cercle ayant O pour centre, et passant par les points E′ et E″.

Nota. — La même question a été résolue par MM. de Kerdrel, à Brest; J.-B. Perrin, à Clermont-Ferrand; Kauffman-Cognet, à Bordeaux; Chapron, à Versailles; Vigneron, Lycée Henri IV, à Paris.

QUESTION 109

Solution par M. MILLOT, élève au Lycée de Chaumont.

On considère une suite de termes

$$u_1, u_2, u_3, u_4 \ . \ . \ . \ u_{2n-1}, u_{2n}$$

qui jouissent de cette propriété que si l'on considère quatre termes consécutifs dans cette série, le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens. On donne les trois premiers termes u_1, u_2, u_3, *et l'on demande de trouver la somme* S_{2n} *des* 2_n *premiers termes. On supposera que* u_3 *est un nombre différent de* u_1.

On a, comme conséquence de l'hypothèse :

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_3}{u_4}, \quad \frac{u_2}{u_3} = \frac{u_4}{u_5}, \quad \frac{u_3}{u_4} = \frac{u_5}{u_6}, \ . \ . \ . \ \frac{u_{2n-3}}{u_{2n-2}} = \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}}.$$

De ces diverses proportions on déduit

$$u_4 = u_2\frac{u_3}{u_1}, \quad u_5 = u_3\frac{u_4}{u_2} = u_3\frac{u_3}{u_1}, \quad u_6 = u_4\frac{u_5}{u_3}$$

$$= u_4\frac{u_3}{u_1}, \ . \ . \ . \ u_{2n} = u_{2n-2}\frac{u^3}{u_1}.$$

On voit que chaque terme, à partir dn troisième, est le produit de celui qui le précède de deux rangs par le rapport constant $\frac{u_3}{u_1}$.

Or la série des termes donnés peut se diviser en deux séries:

$$u_1 \quad u_3 \quad u_5 \quad u_7 \ . \ . \ . \ u_{2n-1}$$

$$u_2 \quad u_4 \quad u_6 \quad u_8 \ . \ . \ . \ u_{2n},$$

la première contenant la suite des termes de rang impair et la seconde la suite des termes de rang pair.

Il résulte de ce qui précède que ces deux séries forment deux progressions géométriques de n termes, ayant pour raison commune $r = \frac{u_3}{u_1}$ et pour premiers termes respectifs u_1 et u_2.

Donc, en appliquant la formule connue $\frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$, on

trouve pour la somme

$$S_{2n} = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1} + \frac{u_2(r^n - 1)}{r - 1} = (u_1 + u_2)\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Remarque. — La formule trouvée peut se mettre sous la forme

$$S_{2n} = (u_1 + u_2)(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1}).$$

On peut dire que la somme cherchée est égale au produit de la somme des deux premiers termes par la somme de toutes les puissances de r jusqu'à la $(n - 1)^{me}$ inclusivement.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Vigneron, lycée Henri IV à Paris; Chapron, à Versailles; Guilloz, institution de Sainte-Marie, à Besançon; de Kerdrel, à Brest; F. Taratte, à Evreux; Vigarié, à Toulon; Bourgarel, à Antibes.

QUESTION 110

Solution par M. Vigneron, élève au Lycée Henri IV, à Paris.

Soient $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n$ *des nombres tels que l'un quelconque d'entre eux soit égal au produit des deux précédents. Démontrer que, en désignant par* P_n *le produit de ces nombres, on a*

$$P_n = u_2 P_{n-1} . P_{n-2};$$

les nombres u_1 *et* u_2 *sont supposés quelconques.*

On a d'abord

$$P_3 = u_1 . u_2 . u_3 = u_1 . u_2 . u_1 u_2;$$

donc on a bien

$$P_3 = u_2 P_1 P_2.$$

Cela posé, je suppose la formule vraie pour n; je dis qu'elle est vraie pour $n + 1$.

On a, en effet,

$$P_{n+1} = P_n u_n u_{n-1}.$$

Or, par hypothèse, on a

$$P_n = u_2 P_{n-1} P_{n-2}.$$

Donc

$$P_{n+1} = u_2 P_{n-1}(P_{n-2} . u_n . u_{n-1}).$$

Or

$$P_n = P_{n-1} u_n.$$

$$P_{n-1} = P_{n-2} u_{n-1}.$$

Donc

$$P_n = P_{n-2}\, u_n u_{n-1};$$

par suite on a bien

$$P_{n+1} = u_2 P_{n-1} P_n.$$

Or la formule est vraie pour $n = 3$; elle est donc générale.

Nota. — La même question a été résolue par MM. F. Taratte, à Evreux; de Kerdrel, à Brest; Noël, à Bar-le-Duc; Chapron, à Versailles; Guilloz, institution Sainte-Marie, à Besançon.

QUESTIONS PROPOSÉES

146. — Sur les côtés d'un triangle, on construit extérieurement et intérieurement des triangles isoscèles semblables ayant un angle au sommet de 120°. Démontrer : 1° que les sommets des triangles intérieurs et ceux des triangles extérieurs forment deux triangles équilatéraux ayant pour centre commun le point de concours des médianes du triangle donné ; 2° que les cercles circonscrits à ces deux triangles constituent le lieu des centres de tous les triangles équilatéraux circonscrits au triangle donné.

Exprimer en fonction des éléments de ce dernier triangle les rayons des deux cercles; calculer le côté et la surface du triangle équilatéral circonscrit maximum. *(J. Kœhler.)*

147. — Étant donnée la fraction

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'},$$

on forme l'équation $Ax^2 + 2Bx + C = 0$, donnant les valeurs de x pour lesquelles la fraction est maximum ou minimum. Le polynôme $B^2 - AC$ est un produit de fonctions rationnelles de a, b, c, a', b', c'. Trouver les facteurs de ce produit. *(Weill.)*

148. — On donne deux droites fixes, et un cercle, de centre O, tangent à ces deux droites. Soit AB une tangente variable de ce cercle, et qui rencontre en A et B les deux droites fixes; soit H le point de concours des hauteurs du triangle OAB. Démontrer que le cercle des neuf points du

triangle OAB enveloppe deux cercles, et que le cercle circonscrit au triangle AHB enveloppe aussi deux cercles fixes.

(Weill.)

149. — On donne deux droites fixes et un point O. Un angle AOB, de grandeur constante, tourne autour du point O, A et B étant les points où ses côtés rencontrent respectivement les deux droites fixes. On mène OA′, perpendiculaire à OA, et rencontrant en A′ l'une des droites ; OB′, perpendiculaire à OB, et qui rencontre l'autre droite en B′ ; enfin on projette le point O sur les trois droites AB, AA′, BB′, en α, β, γ. Démontrer que le cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ passe par un point fixe, et touche un cercle fixe. *(Weill.)*

AVIS

Nous rappelons à nos lecteurs que les solutions qu'ils nous adressent doivent porter en tête :

Le numéro de la question ;

Le nom de l'auteur de la solution, ainsi que l'établissement auquel il appartient ;

L'énoncé complet de la question proposée.

De plus, s'il y a des figures, celles-ci doivent être faites avec beaucoup de soin et sur des feuilles à part.

Enfin, nous prions nos lecteurs de mettre les diverses questions sur des feuilles séparées, pour faciliter le classement des solutions, et éviter des oublis ou des erreurs.

Ces solutions sans aucun avis d'envoi, peuvent être adressées sous bande ou sous enveloppe ouverte.

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER, — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE 20, PARIS. — 12072-4.

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Ferrent.**

INTRODUCTION

Les questions sur les propriétés générales des nombres conduisent à la résolution, en nombres entiers, d'équations indéterminées.

Nous nous proposons d'exposer ici une méthode permettant de résoudre ces sortes d'équations, dans le cas où elles sont du premier ou du deuxième degré.

On sait que cette étude, très délicate, a fait l'objet des recherches d'un grand nombre de géomètres, parmi lesquels figurent les noms illustres de *Fermat*, *Euler*, *Lagrange*, *Legendre*, *Gauss*, *Poinsot*, *Cauchy*, *Jacobi*, etc.

Nous reprendrons dans cette étude quelques-uns des travaux de ces savants, mais en nous efforçant d'en élaguer les difficultés qui s'y rencontrent quelquefois.

D'ailleurs, nous n'aurons recours qu'aux seules connaissances de l'algèbre élémentaire, et nous introduirons dans nos démonstrations toute la clarté et toute la simplicité qui sont particulièrement imposées à cette branche des mathématiques.

On trouvera dans ce travail une théorie que nous croyons nouvelle, et que nous avons nommée la *théorie des solutions conjuguées*. Elle apporte notamment une importante simplification dans le travail nécessaire à la résolution de l'équation

$$y^2 - Mx^2 = N,$$

et elle permet de résoudre cette équation dans bien des cas où ce travail serait rendu matériellement impossible par la longueur des calculs.

L'étude de l'analyse indéterminée a été longtemps en honneur, et les plus célèbres mathématiciens, dont nous avons cité les noms, l'ont cultivée. Délaissée, au moins en apparence, pendant quelques années, elle a été l'objet de

récents travaux, qui font penser que l'attention des savants se porte de nouveau sur ce champ des mathématiques.

Les articles de MM. *Réalis*, *Catalan*, *Ed. Lucas*. *Desboves*, *Landry*, qui ont paru dans ces dernières années dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, ou dans les *Nouvelles Annales* ou dans les comptes rendus de l'Association française ou enfin dans les comptes rendus de l'Académie des sciences; ceux que M. *de Longchamps* a publiés dans ce Journal, à propos de l'équation de *Pell* et d'un mémoire de M. *Landry*, semblent rappeler sur cette intéressante partie des mathématiques l'attention de quelques-uns.

Le travail que nous publions ici offrira peut-être quelque intérêt, et permettra, en dehors des points nouveaux qu'il renferme, croyons-nous, d'initier les lecteurs de ce Journal à des connaissances qui ont été déjà établies, mais qui se trouvent répandues dans des ouvrages nombreux et qu'on ne se procure que difficilement.

CHAPITRE PREMIER

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A n INCONNUES

1. — Nous ne nous arrêterons pas à la résolution de l'équation à deux inconnues

$$a_1x_1 + a_2x_2 = \text{K}, \qquad (1)$$

dans laquelle a_1, a_2 et K sont des nombres entiers.

Tous les traités élémentaires d'algèbre font connaître la méthode employée, et lorsque l'équation peut être résolue, toutes les solutions sont comprises dans les expressions

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + a_2t \\ x_2 &= \alpha_2 - a_1t \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

que l'on peut aussi écrire

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 - a_2t \\ x_2 &= \alpha_2 + a_1t \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$x_1 = \alpha_1$ et $x_2 = \alpha_2$ étant une première solution de l'équation (1); a_1 et a_2, les coefficients des inconnues dans la même équation, et t, une quantité indéterminée, à laquelle on peut donner toute valeur *entière*, positive ou négative.

Cette équation peut toujours être résolue en nombres en-

tiers, lorsque les coefficients a_1, a_2 sont premiers entre eux. Elle ne peut être résolue dans le cas contraire.

2. — L'équation à n inconnues

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = K, \qquad (4)$$

dans laquelle nous supposons les nombres entiers a_1, a_2, ... a_n et K débarrassés de tout diviseur commun, ne peut être résolue en nombres entiers, lorsque les coefficients a_1, a_2, ... a_n ont un diviseur commun.

En effet, tous les nombres entiers substitués aux inconnues donneront au premier membre une valeur divisible par ce diviseur, et cette valeur ne pourra jamais être égale à la quantité K, qui est, par hypothèse, première avec ce même diviseur.

3. — Réciproquement, lorsque l'équation (4) a ses coefficients premiers entre eux, cette équation peut toujours être résolue en nombres entiers.

Posons en effet

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = a_1x_1 + \rho U,$$

ρ étant le plus grand commun diviseur des coefficients a_2, a_3, ... a_n.

L'équation (4) deviendra

$$a_1x_1 + \rho U = K, \qquad (5)$$

a_1 et ρ étant premiers entre eux, l'équation (5) pourra toujours être résolue en nombres entiers. Soit $x_1 = \xi_1$ et $U = v$ une solution de cette équation.

Si l'équation $U = v$ peut être résolue en nombres entiers, l'équation (4) pourra également être résolue.

Or, l'équation $U = v$ a ses coefficients premiers entre eux et ne contient que $n - 1$ inconnues. Si donc une équation à $n - 1$ inconnues peut être résolue en nombres entiers, lorsque ses coefficients sont premiers entre eux, il en est de même de l'équation à n inconnues. Mais l'équation à deux inconnues peut toujours être résolue dans ce cas; il en sera donc de même de l'équation à trois inconnues. Cette dernière pouvant être résolue dans le même cas, cette propriété appartiendra également à l'équation à quatre, cinq, etc., n inconnues.

Cette démonstration donne en même temps le moyen de trouver une première solution de l'équation (4), lorsque cette équation peut être résolue.

4. — Soit l'équation à trois inconnues

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = K, \quad (6)$$

dans laquelle nous supposerons a_1, a_2 et a_3 premiers entre eux.

Soit $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $x_3 = \alpha_3$ une première solution; on aura l'égalité

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = K; \quad (7)$$

d'où l'on déduit

$$a_1(x_1 - \alpha_1) + a_2(x_2 - \alpha_2) + a_3(x_3 - \alpha_3) = 0. \quad (8)$$

Posons, pour abréger, $x_1 - \alpha_1 = X_1$, $x_2 - \alpha_2 = X_2$, $x_3 - \alpha_3 = X_3$; il viendra

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = 0; \quad (9)$$

soit ρ_1 le plus grand commun diviseur de a_2 et a_3; ρ_1 devra diviser a_1X_1, et comme il est premier avec a_1, il devra diviser X_1. Posons donc

$$X_1 = \rho_1 t.$$

L'équation (9) deviendra

$$a_1 t + \frac{a_2}{\rho_1} X_2 + \frac{a_3}{\rho_1} X_3 = 0. \quad (10)$$

Quelque valeur que nous donnions à t, l'équation (10) pourra toujours être résolue, puisque les coefficients $\frac{a_2}{\rho_1}$ et $\frac{a_3}{\rho_1}$ sont premiers entre eux; t n'est donc plus une inconnue, mais bien une quantité entièrement indéterminée.

Nous pouvons donc considérer l'équation (10) comme ne dépendant que de deux inconnues X_2 et X_3, et nous pourrons la résoudre à la manière de l'équation à deux inconnues.

Toutefois, une difficulté se présente, par suite de l'existence de l'indéterminée t; et il importe de trouver une première solution, quelle que soit la valeur que l'on puisse donner ultérieurement à cette indéterminée.

Nous atteindrons ce but en faisant $t = 1$ dans l'équa-

tion (10). Nous aurons ainsi l'équation

$$a_1 + \frac{a_2}{\rho_1} X_2 + \frac{a_3}{\rho_1} X_3 = 0. \qquad (11)$$

Soit $X_2 = \beta_2$, $X_3 = \beta_3$ une première solution de cette équation; $X_2 = \beta_2 t$ et $X_3 = \beta_3 t$ formeront une première solution de l'équation (10), quel que soit t, et toutes les solutions seront données par les formules (2) :

$$X_2 = \beta_2 t + \frac{a_3}{\rho_1} t_1,$$

$$X_3 = \beta_3 t - \frac{a_2}{\rho_1} t_1,$$

avec $X_1 = \rho_1 t$;

d'où nous déduirons

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \rho_1 t \\ x_2 &= \alpha_2 + \beta_2 t + \frac{a_3}{\rho_1} t_1 \\ x_3 &= \alpha_3 + \beta_3 t - \frac{a_2}{\rho_1} t_1 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

et on aura, entre les constantes de ces formules, les relations

$$\left.\begin{aligned} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 &= K \\ a_1\rho_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

5. — Nous pouvous résoudre, par le même procédé, l'équation à quatre inconnues

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = K, \qquad (14)$$

dont les quatre coefficients sont supposés premiers entre eux.

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, x_3 = \alpha_3, x_4 = \alpha_4$$

étant une première solution, on aura

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 = K. \qquad (15)$$

Retranchons (15) de (14), et posons, pour abréger,

$$x_1 - \alpha_1 = X_1, x_2 - \alpha_2 = X_2, x_3 - \alpha_3 = X_3, x_4 - \alpha_4 = X_4;$$

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 = 0. \qquad (16)$$

Soit ρ_1 le plus grand commun diviseur de a_2, a_3, a_4 ; ρ_1 doit diviser a_1X_1, et, par conséquent X_1, puisque a_1 et ρ_1 sont premiers entre eux.

Nous poserons donc

$$X_1 = \rho_1 t_1$$

et l'équation devient

$$a_1t_1 + \frac{a_2}{\rho_1}X_2 + \frac{a_3}{\rho_1}X_3 + \frac{a_4}{\rho_1}X_4 = 0. \qquad (17)$$

Les trois coefficients $\frac{a_2}{\rho_1}$, $\frac{a_3}{\rho_1}$, $\frac{a_4}{\rho_1}$ étant premiers entre eux, l'équation (17) pourra toujours être résolue pour toute valeur de t_1. Cette quantité est, par conséquent, indéterminée.

Posons $t_1 = 1$ dans cette équation, et soit

$$X_2 = \beta_2,\ X_3 = \beta_3,\ X_4 = \beta_4$$

une première solution de

$$a_1 + \frac{a_2}{\rho_1}X_2 + \frac{a_3}{\rho_1}X_3 + \frac{a_4}{\rho_1}X_4 = 0, \qquad (18)$$

de sorte que l'on ait

$$a_1 + \frac{a_2}{\rho_1}\beta_2 + \frac{a_3}{\rho_1}\beta_3 + \frac{a_4}{\rho_1}\beta_4 = 0; \qquad (19)$$

$X_2 = \beta_2 t_1$, $X_3 = \beta_3 t_1$, $X_4 = \beta_4 t_1$ sera une première solution de l'équation (17), quelle que soit la valeur de t_1 et l'on aura

$$a_1t_1 + \frac{a_2}{\rho_1}\beta_2 t_1 + \frac{a_3}{\rho_1}\beta_3 t_1 + \frac{a_4}{\rho_1}\beta_4 t_1 = 0. \qquad (20)$$

Retranchant de (17), et posant, pour abréger,

$$X_2 - \beta_2 t_1 = Y_2,\ X_3 - \beta_3 t_1 = Y_3,\ X_4 - \beta_4 t_1 = Y_4,$$

nous aurons

$$\frac{a_2}{\rho_1}Y_2 + \frac{a_3}{\rho_1}Y_3 + \frac{a_4}{\rho_1}Y_4 = 0. \qquad (21)$$

Nous raisonnerons sur cette équation comme sur l'équation (9).

Soit ρ_2 le plus grand commun diviseur des coefficients $\frac{a_3}{\rho_1}$ et $\frac{a_4}{\rho_1}$; ρ_2 devra diviser Y_2; nous poserons donc

$$Y_2 = \rho_2 t_2;$$

d'où

$$\frac{a_2}{\rho_1}t_2 + \frac{a_3}{\rho_1\rho_2}Y_3 + \frac{a_4}{\rho_1\rho_2}Y_3 = 0; \qquad (22)$$

t_2 est entièrement indéterminé. Nous pouvons donc résoudre cette équation comme si elle ne dépendait que de deux inconnues, Y_3 et Y_4.

Posons $t_2 = 1$, et soit $Y_3 = \gamma_3$, $Y_4 = \gamma_4$ une première solution de

$$\frac{a_2}{\rho_1} + \frac{a_3}{\rho_1\rho_2} Y_3 + \frac{a_4}{\rho_1\rho_2} Y_4 = 0,$$

de sorte que l'on ait

$$\frac{a_2}{\rho_1} + \frac{a_3}{\rho_1\rho_2}\gamma_3 + \frac{a_4}{\rho_1\rho_2}\gamma_4 = 0; \qquad (23)$$

$Y_3 = \gamma_3 t_2$, $Y_4 = \gamma_4 t_2$ sera une première solution de l'équation (22), et les solutions générales seront données par les formules (2) :

$$Y_3 = \gamma_3 t_2 + \frac{a_4}{\rho_1\rho_2} t_3,$$

$$Y_4 = \gamma_4 t_2 - \frac{a_3}{\rho_1\rho_2} t_3,$$

avec $\qquad Y_2 = \rho_2 t_2.$

Nous déduirons de là :

$$X_2 = \beta_2 t_1 + \rho_2 t_2,$$

$$X_3 = \beta_3 t_1 + \gamma_3 t_2 + \frac{a_4}{\rho_1\rho_2} t_3,$$

$$X_4 = \beta_4 t_1 + \gamma_4 t_2 - \frac{a_3}{\rho_1\rho_2} t_3,$$

avec $\qquad X_2 = \rho_1 t_1$

et enfin

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \rho_1 t_1 \\ x_2 &= \alpha_2 + \beta_2 t_1 + \rho_2 t_2 \\ x_3 &= \alpha_3 + \beta_3 t_1 + \gamma_3 t_2 + \frac{a_4}{\rho_1\rho_2} t_3 \\ x_4 &= \alpha_4 + \beta_4 t_1 + \gamma_4 t_2 - \frac{a_3}{\rho_1\rho_2} t_3 \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

De plus, nous avons, entre les constantes, les relations

$$\left.\begin{aligned} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 &= K \\ a_1\rho_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\beta_4 &= 0 \\ a_2\rho_2 + a_3\gamma_3 + a_4\gamma_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

6. — L'équation à cinq inconnues

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = K, \qquad (26)$$

traitée de la même manière, conduirait aux solutions suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_1 + \rho_1 t_1\\
x_2 &= \alpha_2 + \beta_2 t_1 + \rho_2 t_2\\
x_3 &= \alpha_3 + \beta_3 t_1 + \gamma_3 t_2 + \rho_3 t_3\\
x_4 &= \alpha_4 + \beta_4 t_1 + \gamma_4 t_2 + \delta_4 t_3 + \frac{a_5}{\rho_1\rho_2\rho_3} t_4\\
x_5 &= \alpha_5 + \beta_5 t_1 + \gamma_5 t_2 + \delta_5 t_3 - \frac{a_4}{\rho_1\rho_2\rho_3} t_4
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

et les constantes auraient entre elles les quatre relations

$$\left.\begin{aligned}
a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 + a_5\alpha_5 &= K\\
a_1\rho_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\beta_4 + a_5\beta_5 &= 0\\
a_2\rho_2 + a_3\gamma_3 + a_4\gamma_4 + a_5\gamma_5 &= 0\\
a_3\rho_3 + a_4\delta_4 + a_5\delta_5 &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

7. — Soit l'équation (4) à n inconnues.

Les raisonnements qui nous ont conduit aux formules précédentes peuvent s'appliquer à toute équation du premier degré contenant un nombre quelconque d'inconnues, et la loi de formation de leurs valeurs est assez visible, pour que l'on puisse écrire immédiatement les formules suivantes, dont nous démontrerons du reste l'exactitude tout à l'heure.

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_1 + \rho_1 t_1\\
x_2 &= \alpha_2 + \beta_2 t_1 + \rho_2 t_2\\
x_3 &= \alpha_3 + \beta_3 t_1 + \gamma_3 t_2 + \rho_3 t_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_k &= \alpha_k + \beta_k t_1 + \gamma_k t_2 + \delta_k t_3 + \ldots + \rho_k t_k\\
x_{k+1} &= \alpha_{k+1} + \beta_{k+1} t_1 + \gamma_{k+1} t_2 + \delta_{k+1} t_3 + \ldots \lambda_{k+1} t_k + \rho_{k+1} t_{k+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{n-2} &= \alpha_{n-2} + \beta_{n-2} t_1 + \gamma_{n-2} t_2 + \delta_{n-2} t_3 + \ldots + \lambda_{n-2} t_k + \mu_{n-2} t_{k+1}\\
&\quad + \ldots + \rho_{n-2} t_{n-2}\\
x_{n-1} &= \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} t_1 + \gamma_{n-1} t_2 + \delta_{n-1} t_3 + \ldots + \lambda_{n-1} t_k + \mu_{n-1} t_{k+1}\\
&\quad + \ldots + v_{n-1} t_{n-2} + \frac{a_n}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_{n-2}} t_{n-1}\\
x_n &= \alpha_n + \beta_n t_1 + \gamma_n t_2 + \delta_n t_3 + \ldots + \lambda_n t_k + \mu_n t_{k+1} + \ldots\\
&\quad + v_n t_{n-2} - \frac{a_{n-1}}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_{n-2}} t_{n-1}
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

les constantes ayant entre elles les $n-1$ relations suivantes

$$\left.\begin{array}{r} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \ldots + a_n\alpha_n = \mathrm{K} \\ a_1\rho_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + \ldots + a_n\beta_n = 0 \\ a_2\rho_2 + a_3\gamma_3 + \ldots + a_n\gamma_n = 0 \\ a_3\rho_3 + \ldots + a_n\delta_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-2}\rho_{n-2} + a_{n-1}v_{n-1} + a_nv_n = 0 \end{array}\right\} \quad (30)$$

Dans ces formules, ρ_1 est le plus grand commun diviseur des $n-1$ derniers coefficients de l'équation; ρ_2 le plus grand commun diviseur des $n-2$ derniers coefficients, divisés au préalable par ρ_1; ρ_3, le plus grand commun diviseur des $n-3$ derniers coefficients divisés d'abord par le produit $\rho_1\rho_2$, et ainsi des autres; quant aux autres constantes, elles font partie de premières solutions d'équations successives, d'où proviennent les relations (30).

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 97.)

XXXV

Étant donnés une droite CD *et deux points* A *et* B, *trouver sur* CD *un point* X, *tel que, si l'on joint* AX *et* BX, *la droite* CD *soit l'une des bissectrices de l'angle* AXB.

Ce problème est l'un des plus connus des éléments, comme problème du jeu de billard, de la réflexion d'un rayon lumineux, etc.; nous n'en parlons que pour indiquer la construction *graphique* suivante qui, surtout si l'on ne se sert que de la règle et de l'équerre, est beaucoup plus simple que la construction classiquement connue.

J'abaisse de A et de B les perpendiculaires Aa, Bb sur CD, a et b étant les pieds de ces perpendiculaires sur CD. Je

joins aB, bA. Ces droites se coupent en x; si de x j'abaisse une perpendiculaire sur CD, le pied de cette perpendiculaire est le point X cherché.

Une construction analogue est applicable pour diviser une droite ab en parties proportionnelles à des longueurs données. Par a et par b je mène deux parallèles quelconques sur lesquelles je prends, à partir de a et de b, des longueurs égales aux longueurs données (ou proportionnelles à celles-ci). Soient A et B les extrémités de ces droites, je joins Ab, Ba, soit x leur intersection. Si par x je mène une parallèle à Aa qui coupe ab en X, le point X est le point de division cherché.

XXXVI

On donne un triangle ABC; *on mène les trois hauteurs* AA′, BB′, CC′, *on projette* B′ *et* C′ *en* B'_a, C'_a *sur* BC *et* A′ *en* A'_c *sur* AB *et en* A'_b *sur* AC. *Soit* J *le point où* B′C′ *coupe* AA′;

Démontrer : 1° *Que les quatre droites* $C'B'_a$, $B'C'_a$, AA′, $A'_bA'_c$ *se coupent en un même point* O *pour lequel on a* :

$$OJ = JA';$$

2° *Que si l'on projetait* C′ *en* C'_b *sur* AC, *et* B′ *en* B'_c *sur* AB *on aurait*

$$A'_bA'_c = B'_aB'_c = C'_bC'_a.$$

Soit H le point de concours des hauteurs.

Les deux quadrilatères homothétiques HB′AC′, $A'A'_bAA'_c$ montrent que B′C′ et $A'_bA'_c$ sont parallèles; par suite, si l'on appelle γ le point où $A'_bA'_c$ coupe B′A′, l'angle $\gamma A'_bA'$ sera égal à l'angle C′B′H (puisque leurs côtés sont parallèles et de même sens), c'est-à-dire à $90° - B$; mais les angles alternes internes $\gamma A'A'_b$ et HB′A′ sont égaux; et comme l'on a

$$\text{angle } HB'A' = HB'C' = 90° - B$$

les deux angles $\gamma A'_bA'$ et $\gamma A'A'_b$ sont égaux, ce qui, puisque le triangle $A'A'_bB'$ est rectangle, prouve que γ est le milieu de A′B′, ou que $A'_bA'_c$, coupe JA′ en son milieu.

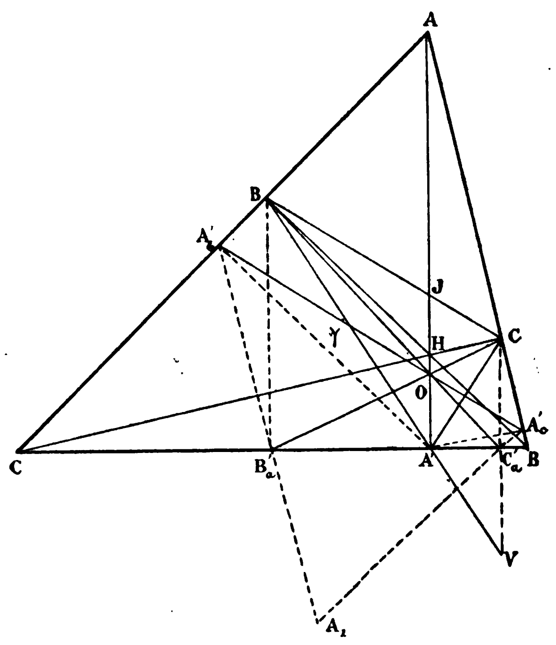
Nous savons déjà par le problème XXXV que $C'B'_a$ et $B'C'_a$ se coupent sur AA′, puisque l'on a

$$\text{angle } C'A'B = \text{angle } B'A'C;$$

il suffira de démontrer que ce point est au milieu de A′J ou

que l'une de ces droites, $B'C'_a$ par exemple, coupe JA' en son milieu.

Remarquons que si l'on prolonge B'A' et $C'C'_a$ jusqu'à leur rencontre en V, on a $C'C'_a = C'_aV$; par suite que $B'C'_a$ est la médiane partant de B' du triangle VB'C', et coupe évidemment



A'J en son milieu. 1° et 2° sont donc démontrés. Ce qui précède montre aussi que les trois droites $A'_bA'_c, B'_aB'_c, C'_aC'_b$ se coupent deux à deux aux milieux du triangle A'B'C'.

Dans le quadrilatère inscriptible $A'A'_bAA'_c$ on a

$$A'A \times A'_bA'_c = AA'_b \times A'A'_c + AA'_c \times A'A'_b$$

ou

$$h_a \times A'_bA'_c = h_a \sin C \times h_a \cos B + h_a \sin B \times h_a \cos C$$

ou
$$A'_bA'_c = h_a \times \sin A = \frac{2S}{a} \times \frac{a}{2R} = \frac{S}{R}.$$

3° est donc démontré, puisque pour $B'_aB_c, C'_aC'_b$ on eût trouvé respectivement $h_b \sin B$, $h_c \sin C$, c'est-à-dire aussi $\frac{S}{R}$.

En projetant la figure sur un plan quelconque, on peut déduire de ce qui précède un théorème ayant rapport non plus aux hauteurs, mais à trois droites concourantes quelconques.

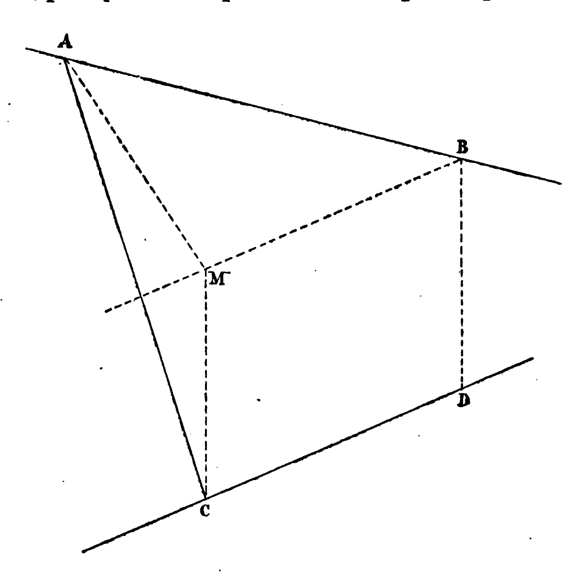
Si nous appelons A_1 le point où se coupent $A'_bB'_a$, $A'_cC'_a$; B_1, C_1 les points analogues par rapport aux autres côtés, nous engageons le lecteur à chercher le problème suivant susceptible d'une solution fort simple : *construire* ABC *connaissant* A_1, B_1, C_1.

XXXVII

Entre deux lignes données AB, CD *non situées dans le même plan, mener une ligne* AC *perpendiculaire à l'une d'elles (à* AB *en* A, *par exemple) et de longueur donnée.*

Soit BD la perpendiculaire commune à ces deux droites.

Supposons le problème résolu et par B menons BM parallèle à DC, puis par C une parallèle à BD qui coupe en M la pa-



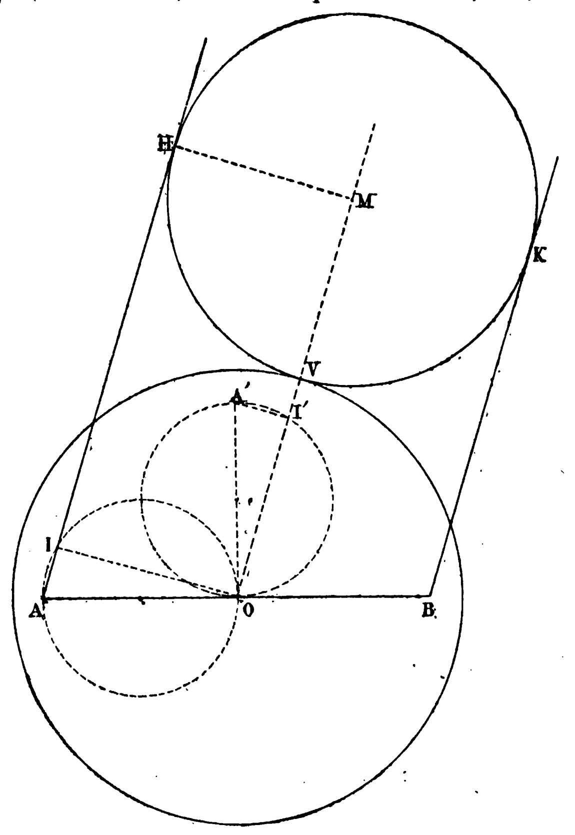
rallèle à CD menée par B et qui est évidemment perpendiculaire au plan MBA CAM; d'après cela, dans le triangle rectangle en M je connais CM = BD et CA, je puis donc le construire.

Mais CM étant perpendiculaire au plan MBA, CA perpendiculaire en A sur BA, droite de ce plan, la réciproque du théorème des trois perpendiculaires montre que MA est perpendiculaire sur AB ; dans le triangle rectangle ABM je connais donc AM et l'angle opposé, je puis donc le construire et par suite déterminer le point A, etc.

Nous engageons les élèves à faire par les procédés de la géométrie descriptive l'épure de cette solution.

XXXVIII

Lieu des centres M *des circonférences tangentes à une circonférence fixe de centre* O, *et à deux parallèles* AH, BK, *variables*



mais passant par deux points fixes A *et* B *situés sur un diamètre à égale distance du centre* O.

De O j'abaisse une perpendiculaire OI sur AH; le lieu de I est la circonférence décrite sur AO comme diamètre. Sur la droite OM, qui contient en V le point de contact des deux circonférences O et M, je prends OI′ = OI = MH; il est évident que si, perpendiculairement à AB, je prends OA′ = OA, le lieu de I′ sera la circonférence décrite sur OA′ comme diamètre, puisque le lieu de I′ n'est autre que le lieu de I qui a tourné d'un quart de cercle autour de O de gauche à droite.

On a donc

$$I'M = I'V + VM = I'V + I'O = \text{constante}.$$

Pour avoir le lieu du point M, je mènerai donc par O toutes les cordes OI′ du cercle fixe OA′I′, et je les prolongerai de I′M égale au rayon du cercle primitif donné; le lieu ainsi obtenu est la courbe bien connue sous le nom de *limaçon de Pascal.*

XXXIX

Soit ABC *un triangle,* M *le milieu de la base* BC*; on sait que la somme des carrés des deux côtés qui comprennent la droite* AM *est égale à deux fois le carré de cette droite plus la somme des carrés des segments que le point* M *détermine sur la base* BC. *La réciproque est-elle vraie: c'est-à-dire si un point* M *pris sur* BC *jouit de cette propriété, est-il forcément le milieu de* BC ?

Soit

$$AM = x,$$
$$CM = y,$$
$$BM = z.$$

Soit α le pied de la hauteur abaissée de A sur BC; l'un des deux triangles AMC, AMB est obtusangle. Supposons que ce soit AMC; on a

$$b^2 = y^2 + x^2 + 2yM\alpha,$$
$$c^2 = z^2 + x^2 - 2zM\alpha,$$

d'où

$$zb^2 + yc^2 = a(x^2 + yz); \qquad (1)$$

mais par hypothèse on a

$$b^2 + c^2 = 2x^2 + y^2 + z^2 \qquad (2)$$

et

$$y + z = a; \qquad (3)$$

éliminant x entre (1) et (2), puis z au moyen de (3), on a

$$4ay^2 + 2y(c^2 - b^2 - 2a^2) + a(b^2 + a^2 - c^2) = 0\,;$$

d'où l'on tire $$y' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

$$y'' = \frac{a}{2}.$$

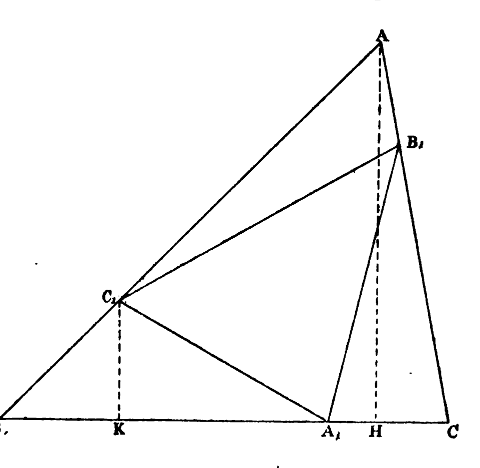
La réciproque n'est donc pas vraie et le point M peut être soit le milieu de BC, soit le pied de la hauteur.

(A suivre.)

CONCOURS GÉNÉRAL DE PHILOSOPHIE

Solution par M. P. Lamaire, élève au Lycée Charlemagne (*).

Étant donné un triangle ABC, *et un nombre positif* m, *plus petit que l'unité, on prend sur le côté* AB *un point* C_1, *tel que* AC_1 *soit égal à* m.AB ; *de même on prend sur* AC *un point* B_1, *tel que* CB_1 *soit égal à* m.AC ; *et sur* BC *un point* A_1 *tel que* BA_1 *soit égal à* m.BC : — 1° *Trouver l'aire du triangle* $A_1B_1C_1$; 2° *on considère une suite indéfinie de triangles* $A_1B_1C_1$; $A_2B_2C_2$,... A_pB_pC , *dont chacun se déduit du précédent, comme le triangle* $A_1B_1C_1$ *se déduit de* ABC ;



trouver la limite de la somme des aires de ces triangles quand le nombre entier p *augmente indéfiniment*; 3° *étudier les variations de la limite précédente quand le nombre* m *varie de* o *à*

(*) Cette copie a eu le second prix au concours.

I; *4° déterminer les positions des points de rencontre des médianes de chacun des triangles* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, . . . $B_pA_pC_p$.

1° L'aire du triangle $A_1B_1C_1$ peut être considérée comme équivalente à l'aire du triangle donné diminuée des petits triangles AC_1B_1, BC_1A_1, CA_1B_1. Évaluons l'un de ces triangles, BC_1A_1 par exemple.

L'aire de ce triangle a pour expression

$$\frac{BA_1 \times C_1K}{2}.$$

Mais

$$BA_1 = m \,.\, BC$$

et dans les triangles semblables BC_1K, BAH, on a la proportion

$$\frac{C_1K}{AH} = \frac{BC_1}{BA} = 1 - m\,;$$

d'où

$$C_1K = AH(1 - m).$$

L'aire du triangle est donc

$$\frac{m \,.\, BC \,.\, AH \,.\, (1 - m)}{2}$$

ou en remarquant que $\frac{BC \,.\, AH}{2}$ n'est autre chose que la surface S du triangle

$$Sm(1 - m).$$

On verrait facilement d'ailleurs que l'aire de chacun des deux autres petits triangles a la même expression.

La surface du triangle $A_1B_1C_1$ sera donc

$$S - 3Sm(1 - m) = S(3m^2 - 3m + 1).$$

2° Telle est la surface du triangle $A_1B_1C_1$.

Elle se déduit du triangle précédent en multipliant par le trinôme $3m^2 - 3m + 1$. De même, si on considère un second triangle $A_2B_2C_2$ formé avec $A_1B_1C_1$ comme celui-ci a été formé avec ABC, la surface de ce nouveau triangle sera

$$S(3m^2 - 3m + 1)^2.$$

De même les triangles $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$ ... auront pour surface

$$S(3m^2 - 3m + 1)^3$$
$$S(3m^2 - 3m + 1)^4$$

En général, le triangle $A_pB_pC_p$ aura pour surface

$$S(3m^2 - 3m + 1)^p.$$

Les aires de tous ces triangles forment, en y comprenant le premier, une progression géométrique décroissante dont le premier terme est S et la raison $3m^2 - 3m + 1$.

A la limite la somme de ces aires sera

$$\frac{S}{1 - (3m^2 - 3m + 1)} = \frac{S}{3m(1 - m)}.$$

3° Voyons ce que devient cette expression, si m varie entre 0 et 1. Elle variera évidemment en raison inverse de son dénominateur $3m(1 - m)$, puisque son numérateur est un nombre constant.

Si $m = 0$, ce denominateur s'annule et l'expression devient égale à $\frac{S}{0} = \infty$. C'est qu'alors les points C_1, A_1, B_1 se confondant avec les sommets du triangle donné, tous les triangles successifs sont égaux à ce dernier, et comme leur nombre est infini, la somme de leurs surfaces est infinie.

Si m croît, le produit $m(1 - m) = m - m^2$ varie de la même manière que m, puisque m est compris entre 0 et 1. Donc si m croît, $m(1 - m)$ croît et l'expression $\frac{S}{3m(1 - m)}$ décroît. D'ailleurs elle ne décroît pas au delà de toute limite, car pour $m = 1$, elle reprend la forme $\frac{S}{0} = \infty$. Alors les sommets C_1, A_1, B_1 se confondent avec les sommets B, C, A du triangle donné.

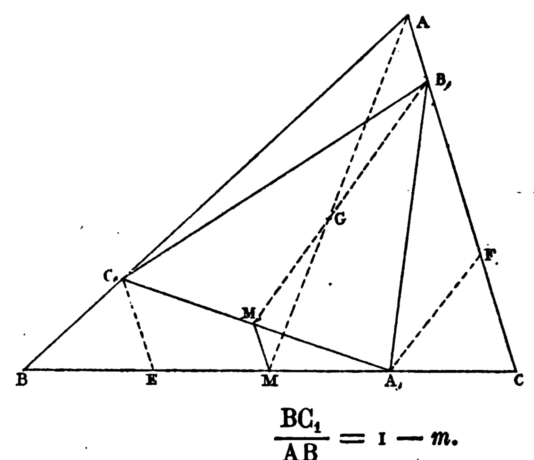
L'expression a donc dû passer par un minimum. Or le produit $m(1 - m)$ est un produit de deux facteurs dont la somme est constante et égale à 1. Il atteint donc son maximum pour $m = 1 - m = \frac{1}{2}$.

Alors la limite considérée est minima et égale à

$$\frac{S}{\frac{3}{4}} = \frac{4S}{3}.$$

4° Reprenons les triangles ABC, $B_1C_1A_1$, et menons par les sommets A et B_1 les médianes AM et B_1M_1. Ces lignes

se coupent en un certain point G. Par les sommets C_1 et A_1 du second triangle, menons des parallèles aux côtés opposés du premier, C_1E et A_1F. Les triangles C_1BE et FA_1C étant semblables à ABC, on a :



$$\frac{FA_1}{AB} = \frac{CA_1}{CB} = 1 - m,$$

$$\frac{BC_1}{AB} = 1 - m.$$

D'où

$$\frac{BC_1}{AB} = \frac{FA_1}{AB}$$

et par suite

$$BC_1 = FA_1.$$

Les triangles considérés sont donc égaux et

$$BE = A_1C.$$

Donc le point M est le milieu de EA_1.

La ligne MM_1 est parallèle à C_1E et par suite à AC. D'ailleurs

$$MM_1 = \frac{C_1E}{2}$$

et comme

$$\frac{C_1E}{AC} = \frac{BC_1}{BA} = 1 - m,$$

$$MM_1 = \frac{AC(1 - m)}{2}.$$

De plus les triangles semblables donnent la proportion

$$\frac{M_1M}{AB_1} = \frac{GM}{GA} = \frac{GM_1}{GB_1}$$

et comme

$$AB_1 = AC(1 - m),$$

$$\frac{M_1M}{AB_1} = \frac{1}{2} = \frac{GM}{GA} = \frac{GM_1}{GB_1}.$$

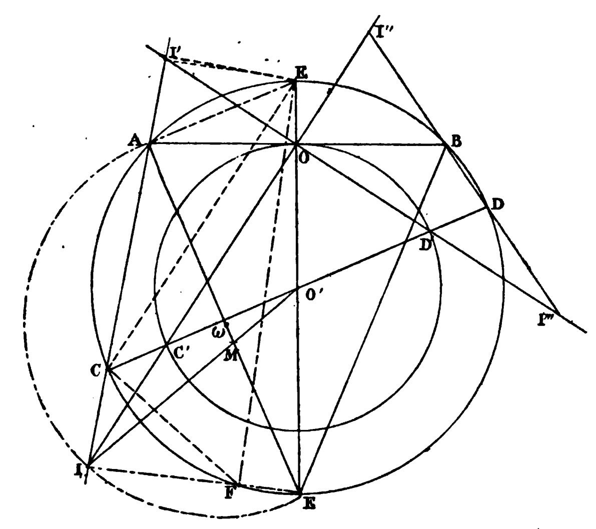
Le point G est donc au tiers de la ligne MA et de la ligne M_1B_1 c'est-à-dire que les médianes des deux triangles concourent au même point. Il en sera donc de même pour les triangles successifs $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ ...

NOTA. — Une autre solution nous a été adressée par M. Vigarié, à Toulouse.

QUESTION 112.

Solution par M. L. MADIOT, élève à l'Institution Sainte-Marie de Besançon.

On considère deux cercles concentriques Δ *et* Δ′, *ayant pour centre commun* O′. *On mène une tangente* AB *à* Δ′, *rencontrant* Δ *en* A *et* B, *et touchant* Δ′ *en* O. *Un diamètre rencontre* Δ *en* C *et* D, *et* Δ′ *en* C′ *et* D′. *On mène* OC′ *et* OD′ ; *ces lignes rencon-*



trent AC *aux points* I *et* I′, *et* BD *en* I″, I‴ : — 1° *chacun des points* I, I′, I″, I‴ *décrit un cercle quand* CD *tourne autour de* O′; — 2° *le milieu de* AC *coïncide avec le milieu de* II′ ; — 3° *les triangles* IOI′, I″OI‴ *sont équivalents* ; — 4° *le maximum de la surface de ce triangle a lieu quand* CD *est parallèle à* AB ; —

5° *les points* I, I′, I″, I‴ *sont sur un cercle concentrique à* Δ. *Ce cercle est maximum quand* CD *est parallèle à* AB.

1° Menons le diamètre EE′ passant par le point O, et joignons E′C. Cette droite est évidemment parallèle à O′C.

Tirons la corde AE; les deux angles AIO et AEE′ égaux à un même troisième ACE′ sont égaux entre eux; d'où l'on voit que le point I décrit la circonférence circonscrite au triangle rectangle AOE.

On reconnaît de même que chacun des points I, I′, I′, I″ se trouve sur la circonférence circonscrite à chacun des triangles AOE′, E′OB, BOE.

2° La droite IE coupant en F le cercle Δ, joignons E′F; la figure IFE′I′ est un rectangle, et l'on a IF = I′E′.

Mais les cordes CF, AE′ qui sous-tendent des arcs compris entre parallèles sont égales, et les triangles rectangles égaux AI′E′, CIF nous donnent CI = AI′.

On voit donc que les milieux de AC et de II′ coïncident.

La même propriété se démontre pour BD et I″I‴.

3° Les deux angles AIO, OI‴B respectivement égaux à AEO, et à OEB, sont égaux entre eux, car l'égalité des deux derniers est évidente.

Les points I, I′, I″, I‴ sont donc sur une même circonférence.

Supposons que les triangles IOI′, I″OI‴ soient équivalents, on aurait

$$OI.\ OI' = OI''.\ OI''';$$

mais on a déjà

$$OI.\ OI'' = OI'.\ OI''':$$

or ces deux équations ne sont vraies simultanément que quand

$$OI = OI''' \text{ et } OI'' = OI'.$$

Du reste, quand cette condition est remplie, la droite OO′ est bissectrice de C′OD′ et CD est parallèle à AB.

4° La droite II′ toujours égale à E′F n'est jamais supérieure à EE′; de plus dans le triangle IOI′ la hauteur relative à II′ est au plus égale à AO.

Le triangle IOI′ a donc pour valeur maxima la surface

EAE′, et n'atteint ce maximum que quand CD est parallèle à EE′.

Quand cette condition est remplie, on a

$$ACO' = OO'D = OBI'.$$

Or l'égalité des deux derniers angles ne peut exister que quand l'arc BD est nul, c'est-à-dire quand CD passe par le point B. Le triangle IOI′ est donc maximum quand CD passe par le point B.

5° Nous avons vu que les points I, I′, I″, I‴ sont sur une même circonférence, et nous avons démontré que les milieux de II′ et de I″I‴ coïncident respectivement avec les milieux de AC et de BD.

D'après cela, le centre du cercle I, I′, I″, I‴, se trouvant à l'intersection des perpendiculaires élevées sur les milieux de AC et de BD, coïncide avec le centre de Δ.

Ce cercle est maximum quand le point I est sur le rayon perpendiculaire au diamètre AE, car alors il enveloppe les cercles décrits par chacun des points I, I′, I″, I‴.

Quand l'angle AMO′ est droit, le point M est le centre des cercles I, et l'on a

$$IAE = \frac{1}{2} IME = 45^\circ$$

et comme IOE = IAE, IOE = 45, et CD est parallèle à AB.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Paris (avril 1884).

Calculer la surface du polygone régulier de 24 côtés inscrit dans un cercle de rayon égal à l'unité.

— Trouver graphiquement l'angle de deux droites dont on connaît les projections, et qui se coupent sur la ligne de terre.

— Calculer la base et la hauteur d'un triangle isoscèle, connaissant les volumes V et V′ engendrés par le triangle

tournant successivement autour de sa base et autour d'un des deux autres côtés.

— Trouver tous les arcs x qui satisfont à l'équation

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1.$$

— Le triangle équilatéral ABC, dont le côté AB a pour longueur a, tourne autour de l'axe Ax, mené dans son plan par le sommet A perpendiculairement au côté AB. Exprimer, au moyen de a, le volume engendré par la rotation de ce triangle autour de Ax.

— On considère un levier coudé AOB, mobile autour du point O, dans lequel la longueur OA est double de OB. La branche OB est horizontale, et l'angle AOB est de 150°. Quel doit être le rapport des deux poids P et Q, suspendus aux extrémités A et B, pour que le levier soit en équilibre?

— Les angles d'un hexagone sont égaux; les longueurs de ses côtés sont alternativement a et b. Exprimer, au moyen de a et de b, le volume décrit par la rotation de l'hexagone autour de l'un des côtés dont la longueur est a.

— Calculer les solutions des équations simultanées

$$x^2 - y^2 = 5 ; \quad xy = 6.$$

— Étant donné $\operatorname{tg} a = \frac{4}{3}$, trouver

$$\sin a, \cos a, \sin 2a, \cos 2a, \operatorname{cotg} 2a.$$

Poitiers.

Étant donné un cône de révolution à deux nappes, et deux sections parallèles AB, A'B', dont la distance CC' soit égale à une quantité donnée h, on déplace les plans parallèles en leur conservant une direction fixe et la même distance. 1° Trouver l'expression du volume ainsi formé; 2° étudier les variations de la fonction.

Lille.

Deux montagnes ayant l'une 1200 mètres d'altitude et l'autre 2000 mètres, sont dans deux îles voisines, et la distance de leurs sommets est de 36 kilomètres. Or, du sommet de l'une on voit l'autre émerger juste au-dessus de l'hori-

zon. Quel est d'après cela le rayon de la terre supposé sphérique?

Toulouse.

On donne un triangle isoscèle ABO, rectangle en B. Du sommet O comme centre, on décrit un cercle passant par le point B. On mène du point A une sécante ACD sur laquelle on abaisse du point O la perpendiculaire OF, et l'on mène les droites BC, BD. On représente par a le côté AB, et par x l'angle DAB.

1° Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à

$$\frac{1}{2} a \cdot \mathrm{CD} \sin x.$$

2° Calculer en fonction des quantités a et x les longueurs AF, AC, AD, CD, et l'aire du triangle BCD.

3° Déterminer l'angle x de telle façon que cette aire soit maxima.

Besançon.

Connaissant le volume $\frac{\pi a^3}{3}$, et la surface totale πb^2, d'un cône droit SAB, déterminer le rayon de base R et la hauteur h. Condition de possibilité. Quelle relation faut-il supposer entre les données a et b pour que le triangle SAB, obtenu en coupant le cône par un plan passant par l'axe, soit équilatéral?

— Discuter les valeurs des deux trinômes

$$A = x^2 - 5x + 4$$
$$B = x^2 - 8x + 15$$

et de leur rapport lorsque x varie, par valeurs réelles, de $-\infty$ à $+\infty$.

Marseille.

Sur la circonférence d'un cercle de 3 mètres de rayon, on prend un arc ABC, égal au dixième de la circonférence. On demande d'évaluer, en centimètres carrés, l'aire du segment compris entre l'arc ABC et la corde AC. Déduire de cette aire celle que l'on obtiendrait si le cercle avait 6 mètres de rayon.

Nancy.

On donne un plan PαP′, et une droite $(ab, a'b')$ qui rencontre le plan en (m, m'); mener par ce point (m, m') une droite perpendiculaire à $(ab, a'b')$ et situé dans le plan PαP′.

QUESTIONS PROPOSÉES

150. — Un angle constant tourne autour d'un point fixe A, pris sur un cercle, et les côtés rencontrent le cercle en B et C. Soient M, N, P les pieds des hauteurs du triangle ABC. Démontrer que deux des côtés du triangle MNP sont tangents à des cercles fixes, et que le troisième se déplace parallèlement à lui-même. *(Weill.)*

151. — Les extrémités A et B d'une droite AB, de longueur constante, glissent sur deux droites fixes OA, OB. Trouver le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle OAB. *(Weill.)*

152. — Démontrer l'identité

$$x^{4n+2} + y^{4n+2} = [x^{2n+1} - 2x^{2n-1}y^2 + 2x^{2n-3}y^4 - \dots \pm 2xy^{2n}]^2 + [y^{2n+1} - 2y^{2n-1}x^2 + 2y^{2n-3}x^4 - \dots \pm 2yx^{2n}]^2$$

(E. Catalan.)

153. — Un angle constant BAC tourne autour de son sommet fixe A; trouver la position de l'angle pour laquelle il intercepte sur un cercle donné dans son plan une corde de longueur connue.

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER, — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE 20, PARIS. — 15034-4.

CONCOURS DE L'ÉCOLE SAINT-CYR EN 1884

Composition française (Durée *deux heures et demie*).

La nationalité française. — Elle date de loin. — Contemplons avec un religieux respect les vieux âges où elle s'est formée. — Ne soyons pas des fils ingrats. — Pour persévérer dans la grandeur, un peuple a besoin d'une tradition. — L'unité nationale avait été formée avant 1789; que n'ont pas fait pour elle François Ier, Henri IV, Louis XIII, Louis XIV ! — Honorer le passé de la France, c'est augmenter l'amour pour la patrie commune, et préparer des citoyens dignes de continuer sa gloire séculaire.

Thème allemand (Durée *deux heures*).

Lorsque Cambyse, pour surprendre les Éthiopiens, leur envoya des ambassadeurs et des présents, tels que les Perses les donnaient, de la pourpre, des bracelets d'or et des parfums, ils se moquèrent de ses présents, où ils ne voyaient rien d'utile à la vie, aussi bien que de ses ambassadeurs, qu'ils prirent pour ce qu'ils étaient, c'est-à-dire pour des espions. Mais leur roi voulut aussi faire un présent à sa mode au roi de Perse, et prenant en main un arc qu'un Perse eût à peine soutenu, loin de le pouvoir tirer, il le banda en présence des ambassadeurs, et leur dit : « Voici le conseil que le roi des Éthiopiens donne au roi de Perse : quand les Perses se pourront servir aussi aisément que je viens de faire d'un arc de cette grandeur et de cette force, qu'ils viennent attaquer les Éthiopiens, et qu'ils amènent plus de troupes que n'en a Cambyse. »

Mathématiques (durée *trois heures*).

1. — On donne un angle aigu ZOX et un point A sur OX ; d'un point M pris sur OX, entre O et A, on abaisse la perpendiculaire MP sur OZ et l'on considère la longueur y

donnée par la formule $y = \sqrt{OM \times MA + 2MP^2}$; on demande comment y varie quand le point M se déplace sur OX de O jusqu'à A. — Courbe figurative.

2. — Dans un triangle isoscèle ABC, on connaît la base a, la bissectrice β de l'angle à la base B; calculer l'angle $\frac{B}{2}$. Discuter; rendre calculable par logarithmes la formule obtenue.

3. — Connaissant dans un triangle ABC le côté a et les angles B et C; calculer la hauteur abaissée sur le côté a. Données numériques : $a = 13908,5$, $B = 56^\circ\ 15'\ 47'',5$, $C = 39^\circ\ 16'\ 52''$.

Géométrie descriptive (durée *deux heures et demie*).

On donne, dans le plan vertical de projection, un cercle tangent à XY, dont le rayon égale 31 millimètres ; le pentagone régulier inscrit dans ce cercle, et dont un sommet A est sur XY, est la base d'un prisme droit. Un cône droit dont le sommet est situé dans le plan de profil du point A à 84 millimètres au-dessus du plan horizontal, et à 69 millimètres en avant du plan vertical, a pour base, sur le plan horizontal, un cercle dont le rayon est de 60 millimètres. On demande l'intersection du cône et du prisme. On indiquera le tracé des constructions effectuées pour trouver un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

Dans la mise à l'encre, on représentera la portion du prisme qui est contenue dans le cône.

Solution des compositions de mathématiques.

1. — *On donne un angle aigu* ZOX *et un point* A *sur* OX. *D'un point* M *pris sur* OX, *entre* O *et* A, *on abaisse la perpendiculaire* MP *sur* OZ, *et l'on considère la longueur* y *donnée par la formule*

$$y = \sqrt{OM \times MA + 2MP^2};$$

on demande comment y *varie quand le point* M *se déplace sur* OX *de* O *jusqu'à* A. — *Courbe figurative.*

Soient α l'angle ZOX; d la distance OA; x la distance OM; on a

$$OM = x;\ MA = (d - x);\ MP = x \sin \alpha.$$

Donc on a pour la fonction considérée

$$y = \sqrt{x(d - x) + 2x^2 \sin^2 \alpha}$$

ou $$y = \sqrt{dx - x^2 \cos 2\alpha}$$

Pour étudier cette fonction, nous allons élever les deux membres au carré; nous aurons l'équation

$$x^2 \cos 2\alpha - dx + y^2 = 0.$$

Les seules valeurs que puisse prendre la fonction y^2 sont celles qui donnent pour x des valeurs réelles, ce qui nous donne la condition

$$d^2 - 4y^2 \cos 2\alpha \geq 0.$$

A chaque valeur de y satisfaisant à cette condition correspondent deux valeurs réelles pour x; pour qu'elles conviennent au problème, il faut qu'elles soient positives, et plus petites que d. Nous allons distinguer plusieurs cas :

En premier lieu, l'angle 2α est supérieur à $90°$, ou α supérieur à $45°$. Alors les racines sont de signes contraires. Il en résulte que l'on ne doit prendre que la racine positive. Donc, à chaque valeur de y correspondra une seule valeur de x. Il est facile de voir, dans ce cas, que, inversement, à chaque valeur de x comprise entre O et d correspondra une valeur réelle pour y; car, en appelant α' le complément de α, l'expression devient

$$y = \sqrt{x^2 \cos 2\alpha' + dx};$$

on suppose que l'on prend pour y seulement la valeur absolue du radical.

Cela posé, il est aisé de trouver la variation de la fonction. En effet, si nous élevons au carré, la fonction peut se mettre sous la forme

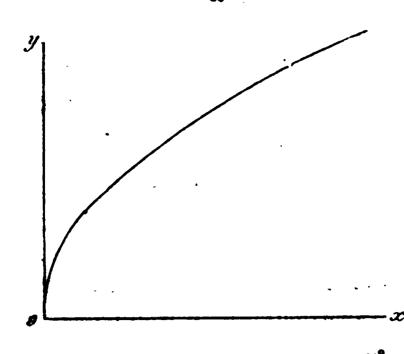
$$y^2 = \cos 2\alpha'\left(x + \frac{d}{2 \cos 2\alpha'}\right)^2 - \frac{d^2}{4 \cos 2\alpha'},$$

et on voit facilement que, x croissant de o à d, y va toujours en croissant. Si l'on cherche à construire dans ce cas la courbe figurative, on voit que son ordonnée va toujours en croissant depuis zéro jusqu'à une valeur particulière, qu'il

serait facile de calculer; il est important de chercher vers quelle limite tend le rapport $\frac{y}{x}$, pour $x = 0$: or, la fraction peut se mettre sous la forme

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{d}{x} - \cos 2\alpha\,;$$

donc le rapport $\frac{y}{x}$ tend vers ∞ quand x tend vers zéro. On on déduit que la courbe présente la forme indiquée par la figure ci-contre.



En second lieu, l'angle α est égal à 45°; alors

$$\cos 2\alpha = 0,$$

et la fonction devient

$$y = \sqrt{dx}\,;$$

cette fonction va également toujours en croissant avec x; et comme le rapport $\frac{y^2}{x^2}$ est égal à $\frac{d}{x}$, il va encore en augmentant lorsque x tend vers zéro. La courbe présente encore une forme analogue à celle de la précédente; du reste, dans ce cas, l'expression prenant la forme

$$y^2 = dx,$$

on voit que la courbe est un arc de parabole compté à partir de son sommet.

En troisième lieu l'angle α est inférieur à 45°. Dans ce cas, l'équation a ses deux racines de même signe. Nous ne pouvons donner à y^2 que des valeurs inférieures à

$$\frac{d^2}{4\cos 2\alpha}.$$

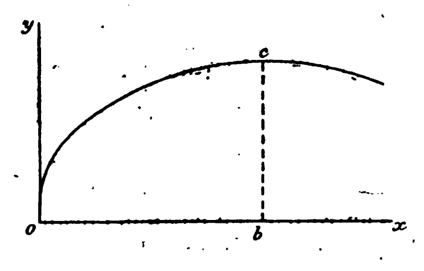
Donc le maximum correspond à la valeur

$$y^2 = \frac{d^2}{4\cos 2\alpha},$$

qui donne la valeur

$$x = \frac{d}{2\cos 2\alpha}.$$

Si $\cos 2\alpha < \frac{1}{2}$, c'est-à-dire si l'on a $2\alpha > 60^\circ$, cette valeur de x est supérieure à d. Il en résulte que la fonction ne passe pas par un maximum pour une valeur de x répondant aux conditions du problème; si au contraire $2\alpha < 60^\circ$, il y a un maximum de y pour une valeur de x contenue dans les limites de l'énoncé. La courbe présente alors la forme (2). Le point b correspond à la valeur de x qui donne le maximum; la valeur correspondante de y est bc.



2. — *Dans un triangle isoscèle* ABC, *on connaît la base* a, *la bissectrice* β *de l'angle à la base* B*; calculer l'angle* $\frac{B}{2}$. *Discuter; rendre calculable par logarithmes la formule obtenue.*

Dans le triangle formé par la base, la bissectrice et le segment du côté adjacent à la base, on a, puisque deux angles ont pour valeurs respectives B et $\frac{B}{2}$:

$$\frac{\sin B}{\sin \frac{3B}{2}} = \frac{\beta}{a}.$$

En remplaçant sin B et $\sin \frac{3B}{2}$ par leur valeur en $\sin \frac{B}{2}$ et $\cos \frac{B}{2}$, on a l'équation

$$\frac{2 \cos \frac{B}{2}}{3 - 4 \sin^2 \frac{B}{2}} = \frac{\beta}{a}.$$

Ou, en exprimant tout en fonction du cosinus :

$$4\beta \cos^2 \frac{B}{2} - 2a \cos \frac{B}{2} - \beta = 0.$$

Cette équation a deux racines de signes contraires.

La valeur positive seule est acceptable, parce que l'angle $\frac{B}{2}$ est nécessairement aigu ; il est même inférieur à 45° ; donc il faut, pour que le problème admette une solution, que, si l'on substitue à la place de $\cos\frac{B}{2}$ la valeur $\frac{\sqrt{2}}{2}$, on trouve un résultat négatif.

Cette substitution donne

$$\beta - a\sqrt{2} < 0.$$

D'autre part, le cosinus devant avoir une valeur inférieure à 1, on aura, en remplaçant le cosinus par 1, une valeur positive, ce qui donne

$$3\beta - 2a > 0.$$

Ainsi, puisque les quantités a et β sont positives, on a les conditions suivantes

$$2\beta^2 < 4a^2 < 9\beta^2.$$

On peut rendre cette formule calculable par logarithmes très facilement, en posant

$$2\cos\frac{B}{2} = z.$$

L'équation devient

$$\beta z^2 - az - \beta = 0.$$

Si on la compare à l'équation qui donne $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ en fonction de $\operatorname{tg}\varphi$, savoir

$$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\frac{2\varphi}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{tg}\varphi = 0,$$

on voit que si l'on pose

$$\frac{\beta}{\operatorname{tg}\varphi} = -\frac{a}{2},$$

ou

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\beta}{a},$$

on prendra la valeur positive de $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, et on en tirera par

logarithmes la valeur du cosinus de l'angle $\frac{B}{2}$; on aura par suite la valeur de $\frac{B}{2}$.

3. — *Connaissant dans un triangle* ABC *le côté* a *et les angles* B *et* C, *calculer la hauteur abaissée sur le côté* a. *Données numériques :*

$$a = 13908,5;$$
$$B = 56^\circ 15' 47'',5$$
$$C = 39^\circ 16' 52''.$$

On a

$$h = b \sin C;$$

or

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A};$$

donc

$$h = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A}.$$

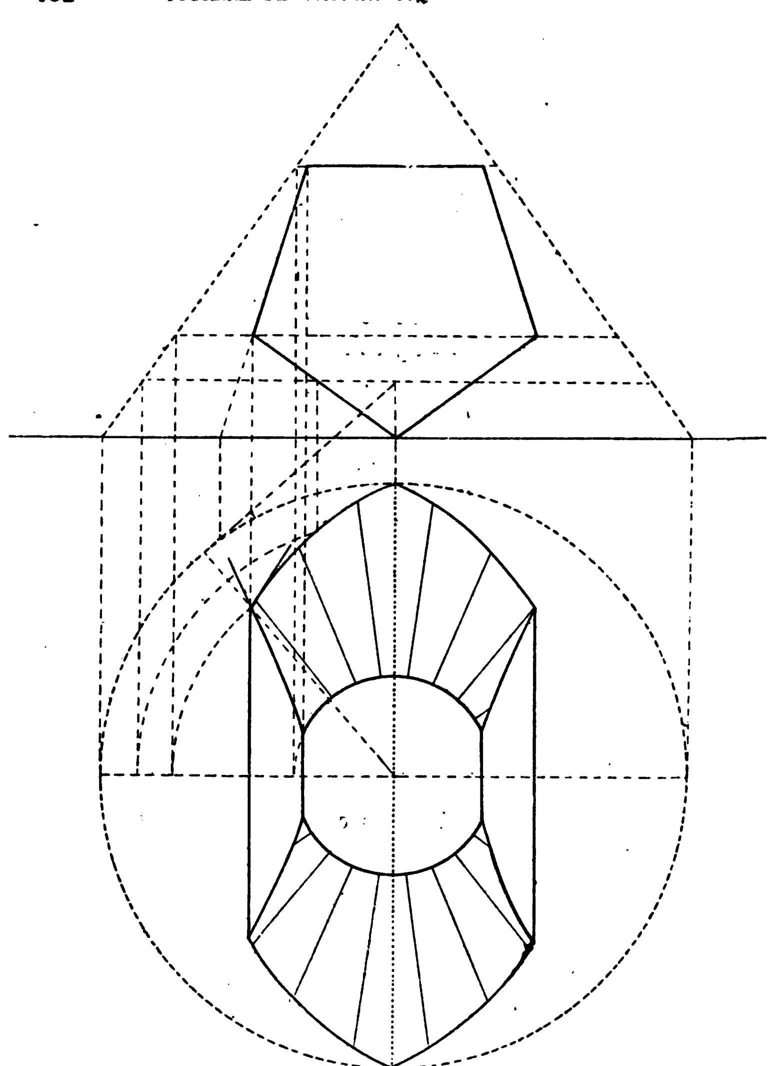
En remplaçant les quantités données par leurs valeurs, on trouve

$$h = 7357.3.$$

Solution de la composition de géométrie descriptive.

L'intersection comprend des arcs de courbe symétriques deux à deux par rapport au méridien de profil, et au méridien de front du cône.

Il n'y a pas lieu de nous arrêter à trouver un point quelconque et la tangente en ce point ; ce qui était plus important était de déterminer les tangentes aux arcs de courbe aux points où l'on passe d'une courbe à une autre. Cette détermination, utile pour trouver la variation de direction des courbes en ces points, ne présente du reste pas plus de difficulté que pour un point quelconque ; on cherchera la trace horizontale du plan tangent en ce point, et les intersections de cette trace avec les traces horizontales des deux faces passant par le point considéré, donneront des points des tan-



gentes, points qu'il suffira de joindre au point donné pour avoir les deux tangentes. Voici, réduite de deux tiers environ, l'épure que l'on devait trouver.

CONCOURS DE L'ÉCOLE NAVALE EN 1884

Arithmétique et algèbre.

1. — Déterminer combien il y a de nombres moindres que 60, et premiers avec lui.

Donner et démontrer la formule permettant de résoudre cette question d'une manière générale.

2. — Un industriel a emprunté, le 1er janvier 1880, une somme de 33640 francs, dont il s'est acquitté en deux paiements, égaux chacun à 19948 fr. 10 c. Le premier de ces paiements a été effectué le 1er janvier 1882, et le second, le 1er janvier 1884. On demande à quel taux exact l'emprunt a été fait, sachant que, pour ces sommes, on a tenu compte des intérêts composés.

Géométrie.

1. — Démontrer que le rapport d'une circonférence à son diamètre est un nombre constant. Quelles sont les différentes méthodes que l'on peut employer pour calculer ce nombre? — Principes sur lesquels repose la méthode des isopérimètres.

2. — On a deux circonférences concentriques A et B, elles sont partagées en un même nombre n de parties égales, soient A_1, A_2, $A_3 \ldots A_n$, les points de division de la première; B_1, B_2, $B_3 \ldots B_n$, les points de division de la seconde. On joint A_1B_1, A_2B_2, $\ldots$ A_nB_n. Soient C_1 le point de rencontre de A_1B_1 et de A_2B_2; C_2 le point de rencontre de A_2B_2 et A_3B_3, etc. Démontrer que le polygone $C_1C_2C_3 \ldots C_n$ est régulier. Chercher comment varie la surface du polygone quand on fait tourner la circonférence B autour de son centre, la circonférence A étant fixe, et les points de division restant les mêmes; maximum et minimum.

Géométrie descriptive.

Tracer les projections d'un tétraèdre SABC satisfaisant aux conditions suivantes: On donne les projections (a, a') de A $(a\alpha = 0{,}040;\ a'\alpha = 0{,}060)$. Le plan prolongé de la base ABC fait un angle de 40° avec la partie postérieure du plan horizontal, et passe par un point donné ω de xy $(\alpha\omega = 0{,}110)$. Le sommet B est dans le plan horizontal, à l'intersection de la perpendiculaire abaissée de A sur la trace horizontale du plan prolongé de ABC. L'arête SC est perpendiculaire au plan de la base ABC, et son prolongement coupe xy en un point donné $\gamma(\alpha\gamma = 0{,}040)$. La longueur de l'arête SC est égale à 0,070, et S est supposé au-dessus du plan de la base.

Composition en narration.

Funérailles de Louis IX à l'abbaye de Saint-Denis.

La Basilique, non encore achevée, avait reçu, depuis quelques années seulement, les sépulcres des rois, dispersés jusqu'alors de divers côtés. Avec le cercueil de Louis IX, rapporté de Tunisie par son fils Philippe, elle reçut ceux de cinq princes ou princesses de la famille royale, morts d'accidents ou de maladies pendant le retour des croisés à travers l'Italie. On dira quelles furent, pendant la cérémonie funèbre, les impressions de la foule accourue des campagnes et des villes voisines, pour rendre un dernier honneur au saint roi.

Les chevaliers et les clercs déploraient l'issue malheureuse d'une croisade dont ils s'étaient promis de tout autres résultats.

Quelques-uns se demandaient si le doigt de Dieu n'était pas là, si tant de calamités n'étaient pas la condamnation définitive de ces lointaines expéditions.

Composition de thème anglais.

Nous avons levé l'ancre à trois heures du matin. Un vent maniable nous a laissés approcher de la pointe du continent

qui avance dans la mer d'Athènes. Mais là, une nouvelle tempête nous a assaillis plus violente encore que la veille; nous avons été en un instant séparés des deux bâtiments qui naviguaient de conserve avec nous. La mer est devenue énorme, nous roulons d'un abîme dans l'autre, les vergues trempant dans la vague et l'écume jaillissant sur le pont. Le capitaine s'obstine à doubler le cap; après plusieurs heures de manœuvres impuissantes, il réussit; nous voilà en pleine mer, le vent est si fort que le brick dérive considérablement.

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

DU PREMIER ET DU SECOND DÉGRÉ

Par M. Ferrent.

(*Suite*, voir p. 121.)

---

8. — Avant de démontrer l'exactitude des formules (29), nous allons faire à leur sujet quelques remarques.

D'abord, les constantes qui entrent dans les formules (29) peuvent toujours être déterminées, lorsqu'on suppose que l'équation proposée peut être résolue.

Ces constantes sont en effet, ou des plus grands communs diviseurs, qui peuvent toujours être déterminés, ou des premières solutions d'équations successives pouvant toujours être résolues : car la première, qui est la proposée, peut être résolue par hypothèse, et toutes les autres ont pour coefficients des nombres entiers qui ont été d'abord divisés par leur plus grand commun diviseur.

9. — Considérons l'équation proposée (4) et les n formules (29) comme $n + 1$ équations entre $n + n - 1$ ou $2n - 1$ inconnues, savoir, les n inconnues $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$, et les $n - 1$ indéterminées $t_1, t_2, t_3, \dots t_{n-1}$.

L'équation proposée peut être obtenue par l'élimination des indéterminées des formules (29).

En effet, si nous ajoutons membre à membre toutes les formules (29), après avoir multiplié la première par a_1, la deuxième par a_2, et ainsi des autres, on voit que toutes les indéterminées disparaissent à cause des relations (30), et on retombe sur l'équation proposée.

10. — Il résulte de là que l'une quelconque des formules (29) peut être obtenue par une élimination entre la proposée et les $n - 1$ autres formules.

En effet, si de l'équation proposée on retranche la somme des formules (29), moins l'une d'elles, chacune de ces formules ayant été multipliée au préalable par les mêmes nombres indiqués au numéro précédent, la différence sera la formule omise, multipliée par un nombre qui ne change pas sa valeur comme équation.

11. — Si, ayant donné aux inconnues de l'équation proposée, $x_1, x_2, \ldots x_n$, des valeurs satisfaisant à cette équation, nous portons ces valeurs dans les premiers membres des formules (29), dans le but d'assigner les valeurs des indéterminées qui y correspondent, nous aurons n équations pour déterminer les $n - 1$ inconnues $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$. Pour que cette détermination soit possible, il est indispensable que l'une de ces équations soit la conséquence des autres.

Or, il résulte des remarques précédentes que cette circonstance se présente. En effet, puisque l'une quelconque des formules est la différence entre la proposée et la somme des autres formules, multipliées respectivement par certains nombres, et que, dans le cas présent, la proposée est réduite à l'égalité de deux nombres, une formule quelconque, dans laquelle on aura substitué au premier membre la valeur qui lui convient, sera la différence entre l'égalité et la somme des autres formules, multipliées comme il a été dit, et dans lesquelles on aurait remplacé les premiers membres par leurs valeurs ; c'est-à-dire qu'une formule quelconque résultera de $n - 1$ autres, et pourra être supprimée dans la recherche de la valeur des indéterminées.

12. — Il est, du reste, facile de s'assurer, par la forme des formules (29), que les valeurs des quantités t_1, t_2,... t_{n-1}, qui correspondent à une solution de la proposée, ne tombent jamais dans aucun cas d'exception, c'est-à-dire qu'elles ne sont jamais ni infinies, ni indéterminées.

En effet, la première ne contient que la quantité t_1, affectée du coefficient ρ_1, qui ne peut être nul; la deuxième, en y remplaçant t_1 par la valeur qui vient d'être trouvée, ne contient que la quantité t_2, multipliée par un coefficient semblable ; chacune des autres formules donnera ainsi la valeur d'une nouvelle quantité, laquelle valeur ne sera ni infinie ni indéterminée, jusqu'à la n — 1e qui contiendra la seule quantité t_{n-1}, multipliée par le coefficient $\dfrac{a_n}{\rho_1\rho_2 \ldots \rho_{n-2}}$, qui ne peut être nul. Quant à la dernière formule, la substitution des valeurs trouvées la réduira à une identité, et il sera inutile d'y avoir égard.

13. — Nous pouvons maintenant démontrer l'exactitude des formules (29).

A cet effet, nous devons faire voir :

1° Que toutes les valeurs que ces formules donneront aux inconnues x_1, x_2, ... x_n, satisfont à la proposée ;

2° Que toutes les valeurs qui satisfont à la proposée sont données par ces formules.

Pour cette seconde partie de la démonstration, il suffira de faire voir que les valeurs des indéterminées (que nous savons déjà être assignables), qui correspondent à une solution quelconque, sont entières; car il résultera de là que les valeurs entières ainsi trouvées étant données aux indéterminées reproduiront bien cette solution.

14. — La première partie de la démonstration est une conséquence des remarques précédentes.

En effet, l'équation proposée résultant de l'élimination des indéterminées entre les n formules (29), tous les nombres qui, substitués aux $2n$ — 1 inconnues des formules, satisfont à celles-ci, satisfont aussi à la proposée; or, les nombres

substitués aux indéterminées et les valeurs qui en résultent pour les inconnues de la proposée satisfont à toutes les formules; les valeurs trouvées pour les inconnues satisferont donc aussi à la proposée.

15. — La seconde partie de la démonstration consiste à faire voir que, si l'on donne aux inconnues de la proposée des valeurs quelconques qui la résolvent, les valeurs correspondantes des indéterminées seront entières.

Prenons d'abord la première formule

$$x_1 = \alpha_1 + \rho_1 t_1 \qquad (31)$$

Considérons les lettres $x_1, x_2, \ldots x_n$, comme représentant, non plus des inconnues, mais des nombres qui satisfont à la proposée, et retranchons de l'égalité (4) la première des relations (30) :

$$a_1(x_1 - \alpha_1) + a_2(x_2 - \alpha_2) + \ldots + a_n(x_n - \alpha_n) = 0. \quad (32)$$

ρ_1, on se le rappelle, est le plus grand commun diviseur des nombres $a_2, a_3, \ldots a_n$; ρ_1 divise donc tous les termes de (32), sauf le premier; ρ_1 doit donc diviser ce premier terme, $a_1(x_1 - \alpha_1)$, et, comme il est, par hypothèse, premier avec α_1, ρ_1 divise $x_1 - \alpha_1$. Donc la valeur de t, tirée de l'équation (31), sera entière.

Prenons maintenant la deuxième formule

$$x_2 = \alpha_2 + \beta_2 t_1 + \rho_2 t_2. \qquad (33)$$

Multiplions chaque membre par a_2 :

$$a_2 x_2 = a_2\alpha_2 + a_2\beta_2 t_1 + a_2\rho_2 t_2. \qquad (34)$$

Ajoutons la première des formules (29), multipliée par a_1 :

$$a_1(x_1 - \alpha_1) + a_2(x_2 - \alpha_2) - (a_1\rho_1 + a_2\beta_2)t_1 = a_2\rho_2 t_2. \quad (35)$$

Les deux premiers termes de l'équation (35) peuvent être transformés au moyen de la relation (32); et le coefficient de t_1, au moyen de la deuxième des relations (30). On obtient ainsi, en divisant en outre par ρ_1 :

$$-\frac{a_3}{\rho_1}(x_3 - \alpha_3) - \frac{a_4}{\rho_1}(x_4 - \alpha_4) - \ldots - \frac{a_n}{\rho_1}(x_n - \alpha_n)$$

$$+\left(\frac{a_3}{\rho_1}\beta_3 + \frac{a_4}{\rho_1}\beta_4 + \ldots + \frac{a_n}{\rho_1}\beta_n\right)t_1 = \frac{a_2}{{}_1\rho}\rho_2 t_2; \qquad (36)$$

divisons également (34) par ρ_1 :

$$\frac{a_2}{\rho_1}x_2 - \frac{a_2}{\rho_1}\alpha_2 - \frac{a_2}{\rho_1}\beta_2 t_1 = \frac{a_2}{\rho_1}\rho_2 t_2. \quad (37)$$

Les deux équations (36) et (37), qui ne contiennent que des termes entiers, donnent l'expression de $\frac{a_2}{\rho_1}\rho_2 t_2$ sous deux formes différentes.

Tous les coefficients des termes du premier membre de (36) sont divisibles par ρ_2, qui est le plus grand commun diviseur des $n - 2$ derniers coefficients de la proposée, divisés au préalable par ρ_1; tous les termes du premier membre de (37) sont divisibles par $\frac{a_2}{\rho_1}$.

La valeur unique du second membre est donc divisible à la fois par ρ_2 et $\frac{a_2}{\rho_1}$. Mais ρ_2 et $\frac{a_2}{\rho_1}$ sont premiers entre eux: car, s'ils avaient un diviseur commun, ce diviseur diviserait les $n - 1$ derniers coefficients de la proposée, divisés d'abord par ρ_1. Or, ceci est impossible, puisque ρ_1 est le plus grand commun diviseur de ces $n - 1$ coefficients. Cette valeur unique du second membre est donc divisible par le produit $\frac{a_2}{\rho_1}\rho_2$ et t_2 est entier.

Maintenant que nous avons prouvé que les valeurs de t_1 et t_2 sont entières, supposons que nous ayons reconnu qu'il en est de même pour les valeurs des autres indéterminées t_3, t_4, etc., jusques et y compris t_k, et démontrons que l'indéterminée suivante, t_{k+1}, aura aussi une valeur entière.

Par un raisonnement connu, cette démonstration suffira pour faire voir que toutes les indéterminées auront des valeurs entières.

La valeur de t_{k+1} sera donnée par la $k+1^e$ des formules (29) :

$$x_{k+1} = \alpha_{k+1} + \beta_{k+1}t_1 + \gamma_{k+1}t_2 + \ldots + \lambda_{k+1}t_k + \rho_{k+1}t_{k+1}. \quad (38)$$

Transposons tous les termes du second membre, sauf le dernier, multiplions par a_{k+1}, et divisons par le produit de $\rho_1\rho_2\ldots\rho_k$, que nous représenterons par π, pour abréger :

$$\frac{a_{k+1}}{\pi}\left[(x_{k+1}-\alpha_{k+1})-\beta_{k+1}t_1-\gamma_{k+1}t_2-\ldots-\lambda_{k+1}t_k\right]$$
$$=\frac{a_{k+1}}{\pi}\rho_{k+1}t_{k+1}. \qquad (39)$$

La sommes des $k+1$ premières formules (29), multipliées respectivement, savoir : la première, par a_1; la deuxième, par a_2, etc., et enfin, la $k+1^e$, par a_{k+1}, nous donnera

$$\left.\begin{array}{l} a_1(x_1-\alpha_1)+a_2(x_2-\alpha_2)+\ldots+a_{k+1}(x_{k+1}-\alpha_{k+1}) \\ \quad-(a_1\rho_2+a_2\beta_2+a_3\beta_3+\ldots+a_{k+1}\beta_{k+1})t_1 \\ \quad-(a_2\rho_2+a_3\gamma_3+a_4\gamma_4+\ldots+a_{k+1}\gamma_{k+1})t_2 \\ \quad-(a_3\rho_3+a_4\delta_4+a_5\delta_5+\ldots+a_{k+1}\delta_{k+1})t_3 \\ -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -(a_k\rho_k+a_{k+1}\lambda_{k+1})t_k=a_{k+1}\rho_{k+1}t_{k+1}. \end{array}\right\} \quad (40)$$

Au moyen des égalités (30) et (32), cette expression peut être transformée de la manière suivante, en divisant de plus chaque terme par π.

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{a_{k+2}}{\pi}(x_{k+2}-\alpha_{k+2})-\frac{a_{k+3}}{\pi}(x_{k+3}-\alpha_{k+3})- \\ \qquad\qquad\ldots-\frac{a_n}{\pi}(x_n-\alpha_n) \\ +\left(\frac{a_{k+2}}{\pi}\beta_{k+2}+\frac{a_{k+3}}{\pi}\beta_{k+3}+\ldots+\frac{a_n}{\pi}\beta_n\right)t_1 \\ +\left(\frac{a_{k+2}}{\pi}\gamma_{k+2}+\frac{a_{k+3}}{\pi}\gamma_{k+3}+\ldots+\frac{a_n}{\pi}\gamma_n\right)t_2 \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\left(\frac{a_{k+2}}{\pi}\lambda_{k+2}+\frac{a_{k+3}}{\pi}\lambda_{k+3}+\ldots+\frac{a_n}{\pi}\lambda_n\right)t_k \\ \qquad\qquad=\frac{a_{k+1}}{\pi}\rho_{k+1}t_{k+1} \end{array}\right\} \quad (41)$$

Les équations (39) et (41) donnent l'expression de $\frac{a_{k+1}}{\pi}\rho_{k+1}t_{k+1}$ sous deux formes différentes.

La première de ces expressions est évidemment divisible par $\frac{a_{k+1}}{\pi}$; la seconde, par ρ_{k+1}. Ces deux nombres étant premiers entre eux, la valeur de $\frac{a_{k+1}}{\pi}\rho_{k+1}t_{k+1}$ sera divisible

par le produit $\frac{a_{k+1}}{\pi}\rho_{k+1}$; la valeur de t_{k+1} sera donc entière.

Les formules (29) satisfont donc à la question.

16. — Des principes exposés dans le présent chapitre nous conclurons la règle suivante pour former les valeurs générales des inconnues de l'équation (4):

Nous chercherons d'abord une première solution de cette équation. Soit $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, . . . $x_n = \alpha_n$ cette première solution. Chacun des nombres α_1, α_2, . . . α_n sera le premier terme de l'expression des valeurs de l'inconnue à laquelle il correspond.

Puis, nous supprimerons, dans l'équation (4), le terme tout connu K, et la lettre x_1, et nous diviserons tous les coefficients des inconnues restantes par leur plus grand commun diviseur ρ_1. Nous aurons ainsi l'équation

$$a_1 + \frac{a_2}{\rho_1}x_2 + \frac{a_3}{\rho_1}x_3 + \ldots + \frac{a_n}{\rho_1}x = 0. \qquad (42)$$

Si $x_2 = \beta_2$, $x_3 = \beta_3$, ... $x_n = \beta_n$ est une première solution de cette équation, le second terme des valeurs des inconnues sera formé de l'indéterminée t_1 multipliée par l'un des nombres ρ_1, β_2, β_3 ... β_n.

Supprimons, dans l'équation (42), le terme tout connu a_1; effaçons la lettre x_2, et divisons les coefficients des inconnues restantes par leur plus grand commun diviseur ρ_2; l'équation deviendra

$$\frac{a_2}{\rho_1} + \frac{a_3}{\rho_1\rho_2}x_3 + \frac{a_4}{\rho_1\rho_2}x_4 + \ldots + \frac{a_n}{\rho_1\rho_2}x_n = 0. \quad (43)$$

Le troisième terme de la valeur des inconnues sera formé, sauf pour x_1 dont l'expression est complète, de l'indéterminée t_2, multipliée, savoir: pour x_2, par ρ_2; et, pour les autres inconnues, par les nombres γ_3, γ_4, ... γ_n, qui forment une solution quelconque de l'équation (43).

On continuera ainsi jusqu'à ce que l'on soit arrivé à l'équation à deux inconnues

$$\frac{a_{n-2}}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{n-2}}x_{n-1} + \frac{a_n}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{n-2}} = 0. \quad (44)$$

Si $x_{n-1} = v_{n-1}$, et $x_n = v_n$ forment une première solu-

tion de cette équation, le $n - 1^e$ terme des trois dernières inconnues x_{n-2}, x_{n-1}, x_n sera formé de l'indéterminée t_{n-2}, multipliée par l'un des nombres ρ_{n-2}, v_{n-1}, v_n; et le dernier terme des deux dernières inconnues, x_{n-1}, x_n, de l'indéterminée t_{n-1} multipliée par les coefficients de l'équation (44), savoir, pour l'inconnue x_{n-1}, par le coefficient de x_n pris avec son signe, et pour l'inconnue x_n, par le coefficient de x_{n-1} pris en signe contraire, chacun de ces cofficients étant divisé par leur plus grand commun diviseur.

(A suivre.)

QUESTION 111

Solution par M. Madiot, élève à l'Institution Sainte-Marie de Besançon.

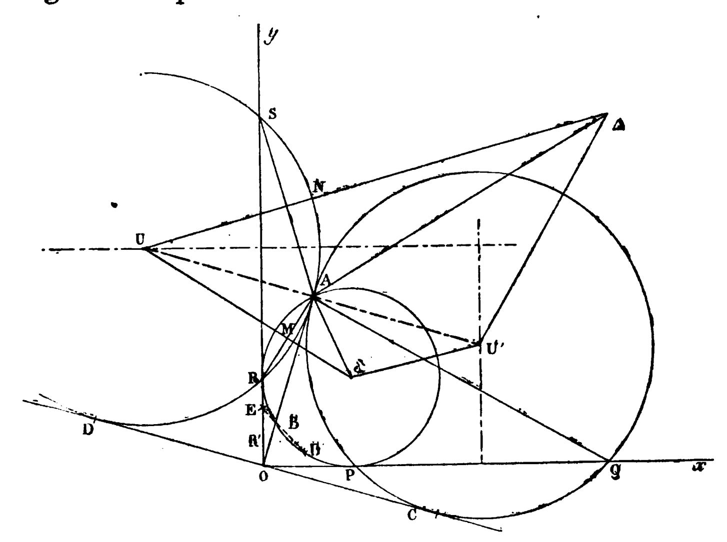
On considère un angle droit xOy, *et un point* A, *dans l'intérieur de cet angle; par le point* A *passent deux cercles* Δ *et* δ *tangents aux droites* Ox *et* Oy; *soient* P *et* Q *leurs points de contact avec* Ox; R *et* S *leurs points de contact avec* Oy. — *1° Démontrer que les cercles* APQ, ARS *sont tangents au point* A; — *2° démontrer qu'ils sont égaux;* — *3° reconnaître que ces cercles sont vus du point* O, *l'un et l'autre sous un angle droit;* — *4° la droite* OA *rencontre* δ *en un point* B *différent de* A; *par* B *passent deux cercles inscrits dans l'angle* yOx, *savoir* δ *et une autre circonférence* δ'. *Démontrer que* δ *est moyen géométrique entre* δ' *et* Δ; — *5° du cercle* Δ *on peut déduire par la construction citée plus haut une infinité de cercles* Δ_1, Δ_2... *inscrits dans l'angle* yOx *et dont les rayons, d'après la remarque 4 sont en progression géométrique. A ces cercles* Δ_1, Δ_2... *correspondent des cercles tels que* APQ *définis tout à l'heure. On obtient ainsi une infinité de cercles* U_1, U_2... *et l'on propose de démontrer que les rayons de ces cercles sont aussi les termes d'une progression géométrique.*

1° On sait que le produit des distances du centre de similitude de deux circonférences, δ et Δ, à deux points antihomologues, est constant. Cette proposition étant vraie dans

le cas où deux de ces points se confondent, on a la relation

$$\overline{OA}^2 = OR.OS = OP.OQ$$

qui suffit pour établir que les circonférences APQ, ARS sont tangentes au point A à la droite OA.



2° Construisons le quadrilatère UδU'Δ, U et U' étant les centres des circonférences ARS et APQ ; menons la ligne des centres UU' qui, d'après ce qui a été démontré, passera au point A; puis enfin tirons Aδ et AΔ.

La droite Uδ passant par le milieu de l'arc ARM, les angles UδA et SRA ont même mesure et sont égaux.

De même la droite UΔ passe par le milieu de l'arc SNA et l'on a encore angle SRA = angle AUΔ.

Par suite

$$U\delta A = AU\Delta$$

On démontre de même l'égalité

$$\text{angle } \delta UA = (\text{angle } RSA) = \text{angle } U\Delta A$$

et l'on reconnaît que les triangles UAδ et UAΔ sont semblables; ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{UA}{A\delta} = \frac{A\Delta}{UA}$$

ou

$$\overline{UA}^2 = A\delta \,.\, A\Delta$$

Mais $A\delta$ et $A\Delta$ sont respectivement les rayons r_1 et r_2 des cercles δ et Δ; on a donc

$$\overline{UA}^2 = r_1 \,.\, r_2$$

La similitude des triangles $AU'\Delta$ et $AU'\delta$ que l'on démontre comme plus haut, nous donne

$$\overline{U'A}^2 = A\delta . A\Delta = r_1 . r_2$$

On voit donc que UA = U'A.

3° Dans l'égalité

$$\overline{OA}^2 = OR.OS$$

OR et OS sont respectivement égales à δR et à ΔS, c'est-à-dire à r_1 et r_2; on a donc encore

$$\overline{OA}^2 = r_1 \,.\, r_2.$$

et l'on voit ainsi que

$$UA = U'A = OA.$$

Menons aux cercles U et U' les tangentes OD et OC; l'égalité précédente nous montre que les figures OAUD, OAU'C sont des carrés, et que par suite les angles AOD et AOC sont droits.

4° Appelons r le rayon du cercle δ' et R' son point de contact avec Oy. En vertu du théorème énoncé plus haut, on a

$$\overline{OB}^2 = OR \,.\, OR' = r \,.\, r_1$$

et

$$\overline{OA}^2 = OR \,.\, OS = r_1 \,.\, r_2$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, il nous vient.

$$\overline{OA}^2 \,.\, \overline{OB}^2 = r \,.\, r_1^2 \,.\, r_2$$

et comme

$$OA \,.\, OB = \overline{OR}^2 = r_1^2$$

$$r_1^2 = r \,.\, r_2$$

5° La droite OA prolongée rencontre Δ en un second point. Par ce point passent deux cercles inscrits dans l'angle yOx, savoir Δ et un second cercle Δ_1. Ce second cercle est à son tour rencontré par OA en un point par lequel passe un nouveau cercle inscrit dans l'angle yOx, et ainsi de

suite. Les rayons de ces cercles sont en progression géométrique.

Appelons $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \dots$ les rayons des cercles tels que APQ correspondants à cette suite de cercles $\delta', \delta, \Delta, \Delta_1, \Delta_2 \dots$ dont nous avons représenté le rayon par $r, r_1, r_2 \dots$

Nous savons que

$$\rho^2 = (\overline{\mathrm{U'A}}^2) = r_1 r_2.$$

On a de même

$$\rho_1^2 = r_2 \cdot r_3$$

et

$$\rho_2^2 = r_3 \cdot r_4.$$

On déduit de là

$$(\rho_1^2)^2 = (r_2 \cdot r_3)^2 = r_1\, r_2\, r_3\, r_4$$

ou

$$r_2 \cdot r_3 = r_1 \cdot r_4$$

Cette dernière équation étant satisfaite, puisque r_1, r_2, r_3, r_4 sont en progression géométrique, la précédente l'est aussi et nous montre qu'un rayon quelconque ρ_1 est moyen géométrique entre celui qui précède ρ et celui qui suit ρ_2 ; la série $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \dots$ est donc une progression géométrique.

Nota. — La même question a été résolue par M. Chapron, à Versailles.

QUESTION 113

Solution par M. J.-B. Perrin, maître répétiteur au petit Lycée de Clermont-Ferrand.

On considère un cercle, et un point P *dans son plan. Soit* Δ *une droite partant de* P, *et rencontrant* C *aux points* A *et* B ; *on mène les tangentes à* C *en ces points et l'on prend le point* Q *symétrique de* P *par rapport au milieu de* AB. *Démontrer que* O *étant le centre de* C, *la perpendiculaire élevée à la droite* OQ *au point* Q *est partagée par ce point et les tangentes citées plus haut en deux parties égales.*

Soient D et E les points où la perpendiculaire au point Q à OQ est rencontrée par les tangentes. Je joins OD et OE.

En vertu du quadrilatère inscriptible OBQE

$$QOE = EBQ;$$

En vertu du quadrilatère inscriptible OADQ

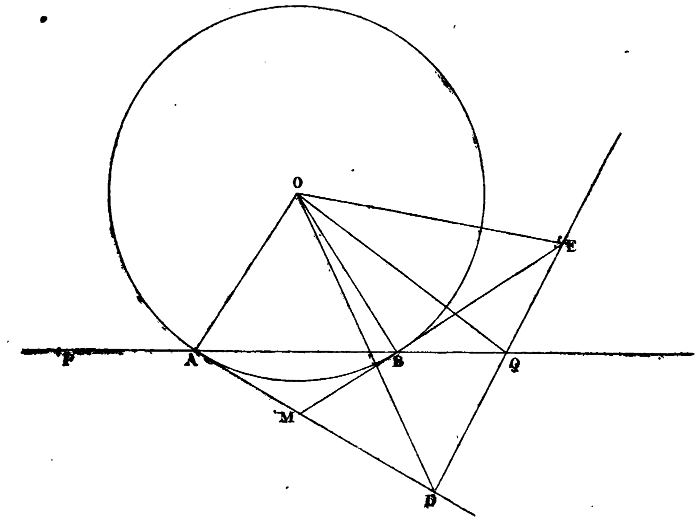
$$DOQ = QAD;$$

or

$$QAD = ABM = EBQ,$$

donc

$$QOE = DOQ,$$



et le triangle DOE est isoscèle puisque la hauteur est bissectrice de l'angle au sommet; donc

$$QE = DQ \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. F. Taratte, à Évreux; de Kerdrel, à Brest; Madiot, Vuillier, à Besançon; Kauffmann, à Bordeaux; Colmaire, à Sedan.

QUESTIONS PROPOSÉES

154. — Étant donné un triangle rectangle, ABC, mener une droite antiparallèle à l'hypoténuse BC, de manière

que la partie DE comprise entre les côtés de l'angle droit soit égale à la somme des perpendiculaires abaissées des points D et E sur l'hypoténuse.

155. — Par un point P, pris sur un côté AB d'un triangle ABC, mener une droite telle que la partie PD comprise entre les côtés AB et AC soit égale à la somme des perpendiculaires abaissées de P et de D sur BC.

156. — Un triangle ABC est tel que l'on puisse, par le point A, mener une sécante AD, faisant avec AB l'angle BAD, tiers de l'angle BAC, en même temps que le point D détermine sur BC un segment BD, tiers du côté BC. Démontrer que les côtés sont liés par la relation

$$a^2b^2 = (b^2 - c^2)(b^2 + 8c^2).$$

157. — On donne un triangle ABC, et une droite qui coupe

BC en α,
AC en β,
BA en γ,

soit O un point du plan, et A', B', C' les points où OA, OB, OC coupent respectivement BC, AC, AB ; soient

c_1 le point où A'β coupe AB,
a_1 — B'γ — BC,
b_1 — C'α — CA;

démontrer que les trois droites Aa_1, Bb_1, Cc_1 sont concourantes.

(E. Lemoine.)

158. — Soit ABC un triangle: 1° trouver un hexagone circonscrit au cercle inscrit au triangle, sachant que sur chaque côté de ABC sont deux sommets consécutifs de l'hexagone et que les diagonales joignant les sommets opposés sont perpendiculaires chacune à la bissectrice de l'angle des côtés du triangle sur lesquels se trouvent les extrémités de cette diagonale; 2° la surface de cet hexagone est

$$\frac{r}{p}(2cb + 2ac + 2ab - a^2 - b^2 - c^2),$$

r, p, a, b, c, étant respectivement le rayon du cercle inscrit, le demi-périmètre, et les côtés du triangle ABC ; 3° si l'on prend un point quelconque sur l'une des diagonales joignant

les sommets opposés de cet hexagone, la somme ou la différence des distances de ce point aux deux côtés du triangle auxquels se termine la diagonale est égale au diamètre du cercle inscrit ; 4° traiter les mêmes questions pour les cercles ex-inscrits. *(E. Lemoine.)*

ERRATUM

Des erreurs d'impression ont rendu inintelligible l'exercice 137. L'énoncé de cette question doit être rétabli ainsi qu'il suit :

137. — On considère deux droites rectangulaires ox, oy et une droite Δ parallèle à ox. Par o on mène une transversale mobile Δ' qui rencontre Δ en A ; de o comme centre avec oA pour rayon, on décrit un cercle qui rencontre ox en B ; par B on mène une parallèle à oy et cette parallèle rencontre Δ' en M. Démontrer que si l'on projette M sur oy en B' et o en I sur BB', le lieu du point I est une circonférence.

G. L.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 17348-1.

ETUDE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Ferrent.**

(*Suite*, voir p. 155.)

CHAPITRE II

OBSERVATIONS SUR LES RÉSULTATS DU CHAPITRE PRÉCÉDENT

17. — Parmi les formules qui ont été données pour la résolution de l'équation à trois inconnues, nous remarquons les formules suivantes mentionnées par M. J. Bertrand dans son *Traité élémentaire d'algèbre* (1850, nº 216):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + a_2\theta + a_3\varphi \\ x_2 &= \alpha_2 - a_1\theta + a_3\psi \\ x_3 &= \alpha_3 - a_1\varphi - a_2\psi \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

dans lesquelles les lettres α_1, α_2, α_3 représentent une première solution; a_1, a_2, a_3, les coefficients des inconnues dans la proposée, et θ, φ, ψ, trois indéterminées.

Ces formules, qui donnent, il est vrai, toutes les solutions de l'équation proposée, ont cependant un grand défaut. En effet, si l'on connaît une solution de la proposée, et que l'on cherche les valeurs correspondantes des indéterminées θ, φ, ψ, on a trois équations entre trois inconnues; mais ces trois équations se réduisent à deux, parce que l'une d'elles est la conséquence des deux autres, de sorte que les trois inconnues restent indéterminées et peuvent recevoir une infinité de valeurs. Il suit de là qu'on peut donner, dans les formules (45), une infinité de valeurs différentes aux indéterminées θ, φ, ψ et trouver toujours la même solution de l'équation.

Ce vice provient de ce que le champ de l'indétermination est trop ouvert par la présence de trois indéterminées; nous

avons vu en effet que la question peut être résolue au moyen de deux indéterminées seulement.

Le même calcul pratiqué sur les formules (12) nous conduirait, comme nous l'avons démontré, à trois équations, qui se réduisent à deux entre les deux inconnues t et t', lesquelles ont toujours une seule valeur entière.

Par conséquent, deux valeurs différentes de t et t' ne peuvent pas reproduire deux fois une même valeur des inconnues x_1 et x_2.

18. — Nous pouvons résoudre d'une manière un peu différente l'équation à trois inconnues.

Les trois coefficients de cette équation sont supposés premiers entre eux, quand on les considère trois à trois; mais ils peuvent avoir des diviseurs communs, si on les considère deux à deux. Soit π_1 le plus grand commun diviseur de a_2 et a_3; π_2, celui de a_1 et a_3, et π_3, celui de a_1 et a_2.

Les trois nombres π_1, π_2, π_3 sont premiers entre eux deux à deux, car si deux d'entre eux avaient un diviseur commun, ce diviseur diviserait les trois coefficients a_1, a_2, a_3.

Il résulte de là que a_1, qui est divisible par π_2 et π_3, est aussi divisible par le produit $\pi_2\pi_3$; a_2 par le produit $\pi_1\pi_3$, et a_3, par le produit $\pi_1\pi_2$.

Nous pouvons donc poser

$$a_1 = \pi_2\pi_3 b_1, \quad a_2 = \pi_1\pi_3 b_2, \quad a_3 = \pi_1\pi_2 b_3;$$

et b_1, b_2, b_3 seront premiers entre eux deux à deux; car, si b_1 et b_2, par exemple, avaient un diviseur commun, ce diviseur diviserait le quotient de a_1 et a_2 par leur plus grand commun diviseur, π_3, ce qui est impossible.

L'équation (6) devient

$$\pi_2\pi_3 b_1 x_1 + \pi_1\pi_3 b_2 x_2 + \pi_1\pi_2 b_3 x_3 = \mathrm{K}; \qquad (46)$$

soit α_1, α_2, α_3 une première solution; on a

$$\pi_2\pi_3 b_1\alpha_1 + \pi_1\pi_3 b_2\alpha_2 + \pi_1\pi_3 b_3 a_3 = \mathrm{K}. \qquad (47)$$

La soustraction donne, en remplaçant

$$x_1 - \alpha_1 \text{ par } \mathrm{X}_1,$$

$$x_2 - \alpha_2 \text{ par } \mathrm{X}_2$$

et

$$x_3 - \alpha_3 \text{ par } \mathrm{X}_3:$$

$$\pi_2\pi_3 b_1 \mathrm{X}_1 + \pi_1\pi_3 b_2 \mathrm{X}_2 + \pi_1\pi_2 b_3 \mathrm{X}_3 = 0. \qquad (48)$$

Nous voyons immédiatement que

X_1 doit être divisible par π_1,
X_2 — — π_2,
X_3 — — π_3.

Posons donc $X_1 = \pi_1 Y_1$; $X_2 = \pi_2 Y_2$; $X_3 = \pi_3 Y_3$.

L'équation devient

$$b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 = 0. \qquad (49)$$

Les coefficients étant premiers entre eux deux à deux, l'une quelconque des inconnues est arbitraire. Prenons, par exemple, $Y_1 = t$, et soit $Y_2 = \eta_2$ et $Y_3 = \eta_3$ une première solution de

$$b_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 = 0, \qquad (50)$$

de sorte que l'on ait

$$b_1 + b_2 \eta_2 + b_3 \eta_3 = 0, \qquad (51)$$

$\eta_2 t$ et $\eta_3 t$ formeront une première solution de

$$b_1 t + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 = 0, \qquad (52)$$

et la solution générale sera, d'après les formules (2) :

$$Y_1 = t,$$
$$Y_2 = \eta_2 t + b_3 t_1,$$
$$Y_3 = \eta_3 t - b_2 t_1.$$

d'où :

$$X_1 = \pi_1 t,$$
$$X_2 = \pi_2 \eta_2 t + \pi_2 b_3 t_1,$$
$$X_3 = \pi_3 \eta_3 t - \pi_3 b_2 t_1,$$

et enfin

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \pi_1 t, \\ x_2 &= \alpha_2 + \pi_2 \eta_2 t + \pi_2 b_3 t_1 \\ x_3 &= \alpha_3 + \pi_3 \eta_3 t - \pi_3 b_2 t_1 \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

19. — Autre manière de résoudre l'équation à quatre inconnues.

Reprenons l'équation (14), et arrivons à l'équation (16):

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = 0 \qquad (54)$$

soit π le plus grand commun diviseur de a_1 et a_2;
et π_1 — — de a_3 et a_4.

Nous pouvons poser

$$\left.\begin{aligned} a_1 X_1 + a_2 X_2 &= \pi Y_1 \\ a_3 X_3 + a_4 X_4 &= \pi_1 Y_2 \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

et

et l'on aura

$$\pi Y_1 + \pi_1 Y_2 = 0 \qquad (56)$$

d'où l'on tire, d'après les formules (2), π et π_1 étant premiers entre eux :

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= \pi_1 t \\ Y_2 &= -\pi t \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Les équations (55) deviennent :

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1}{\pi}X_1 + \frac{a_2}{\pi}X_2 &= \pi_1 t \\ \frac{a_3}{\pi_1}X_3 + \frac{a_4}{\pi_1}X_4 &= -\pi t \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

ξ_1, ξ_2, d'une part, ξ_3, ξ_4 d'autre part, étant des premières solutions de chacune des équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1}{\pi}X_1 + \frac{a_2}{\pi}X_2 &= \pi_1 \\ \frac{a_3}{\pi_1}X_3 + \frac{a_4}{\pi_1}X_4 &= -\pi \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

$\xi_1 t$, $\xi_2 t$, $\xi_3 t$, $\xi_4 t$ formeront une première solution de chacune des équations (58), et les solutions générales seront :

$$X_1 = \xi_1 t + \frac{a_2}{\pi}t_1,$$

$$X_2 = \xi_2 t - \frac{a_1}{\pi}t_1,$$

$$X_3 = \xi_3 t + \frac{a_4}{\pi_1}t_2,$$

$$X_4 = \xi_4 t - \frac{a_3}{\pi_1}t_2;$$

d'où nous déduirons

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \xi_1 t + \frac{a_2}{\pi}t_1 \\ x_2 &= \alpha_2 + \xi_2 t - \frac{a_1}{\pi}t_1 \\ x_3 &= \alpha_3 + \xi_3 t + \frac{a_4}{\pi_1}t_2 \\ x_4 &= \alpha_4 + \xi_4 t - \frac{a_3}{\pi_1}t_2. \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

On peut remarquer que les formules (60) ne contiennent ensemble que 12 termes, tandis que les formules (24) en contiennent 13 pour l'expression des valeurs des inconnues.

Lorsque le nombre des inconnues augmente, il est possible, par un moyen semblable à celui que nous venons d'indiquer, d'obtenir des solutions de formes très variées ; mais les formules (29) ont l'avantage de s'appliquer à un nombre quelconque d'inconnues.

20. — Résolution immédiate d'une équation à n inconnues dont deux coefficients sont premiers entre eux.

Soit l'équation

$$ax + by + cz + du + \ldots + \mathrm{K} = 0 \qquad (61)$$

dans laquelle les coefficients a et b sont premiers entre eux. Posons

$$cz + du + \ldots + \mathrm{K} = \mathrm{U};$$

d'où

$$ax + by + \mathrm{U} = 0. \qquad (62)$$

Soit $x = \xi$, $y = \eta$ une première solution de

$$ax + by + 1 = 0,$$

$\xi\mathrm{U}$ et $\eta\mathrm{U}$ formeront une première solution de (62), et les solutions générales seront d'après les formules (2)

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi\mathrm{U} + bt \\ y &= \eta\mathrm{U} - at \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

lesquelles dépendent toujours de $n - 1$ indéterminées. La même méthode pourrait être appliquée au cas où trois ou quatre inconnues n'auraient aucun diviseur commun à leurs trois ou quatre coefficients.

21. — Les formules générales donnent les valeurs des n inconnues au moyen de $n - 1$ indéterminées.

On ne peut exprimer ces valeurs au moyen d'un nombre inférieur d'indéterminées.

En effet, si, dans l'équation générale (4), le coefficient d'une inconnue, x_1, est l'unité, toute valeur donnée aux autres inconnues satisfera à la question. Les autres inconnues sont donc entièrement indéterminées ; x_1 dépend de ces $n - 1$ quantités et ne peut être exprimé dans toute sa généralité avec un nombre inférieur d'indéterminées.

Les formules générales pouvant se prêter à tous les cas particuliers, il n'est pas possible de trouver des formules dépendant d'un nombre moindre d'indéterminées, et, comme

nous avons vu qu'un plus grand nombre n'est pas nécessaire, nous sommes certains qu'une équation du premier degré à n inconnues peut toujours être résolue au moyen de $n - 1$ indéterminées, lorsque ses coefficients sont premiers entre eux, et que ces $n - 1$ indéterminées sont indispensables.

22. — En examinant les formules (29), nous pouvons faire à leur sujet les remarques suivantes :

1° Dans ces formules, les coefficients d'une même indéterminée sont premiers entre eux.

Prenons en effet les coefficients de t_1, savoir, les quantités $\rho_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n$. Ces coefficients se trouvent réunis dans la deuxième des relations (30), qui peut être mise sous la forme

$$a_1 + \frac{a_2}{\rho_1}\beta_2 + \frac{a_3}{\rho_1}\beta_3 + \ldots + \frac{a_n}{\rho_1}\beta_n = 0, \qquad (64)$$

les quantités $\frac{a_2}{\rho_1}, \frac{a_3}{\rho_1}, \ldots \frac{a_n}{\rho_1}$ représentant des nombres entiers.

Si $\rho_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n$ avaient un diviseur commun, ce diviseur devrait aussi diviser a_1, à cause de l'égalité (64) ; divisant a_1 et ρ_1, il diviserait tous les coefficients de la proposée; or ceux-ci sont premiers entre eux.

Ces coefficients de t_2 sont réunis dans la troisième des relations (30), que nous pouvons mettre sous la forme

$$\frac{a_2}{\rho_1} + \frac{a_3}{\rho_1\rho_2}\gamma_3 + \frac{a_4}{\rho_1\rho_2}\gamma_4 + \cdots + \frac{a_n}{\rho_1\rho_2}\gamma_n = 0 \quad (65)$$

si $\rho_2, \gamma_3, \gamma_4, \ldots \gamma_n$ avaient un diviseur commun, ce diviseur diviserait aussi $\frac{a_2}{\rho_1}$; or, divisant $\frac{a_2}{\rho_1}$ et ρ_2, il diviserait $\frac{a_2}{\rho_1}$, $\frac{a_3}{\rho_1}, \frac{a_4}{\rho_1}, \ldots \frac{a_n}{\rho_1}$, puisque ρ_2 est le plus grand commun diviseur de tous ces quotients moins le premier; mais ces quantités sont premières entre elles, puisqu'elles sont les quotients de diverses quantités par leur plus grand commun diviseur ρ_1. Donc les coefficients de l'indéterminée t_2 sont premiers entre eux.

Nous ne nous arrêtons pas à faire la démonstration sur les coefficients de t_k. Elle ne présente aucune difficulté.

23. — 2° Les coefficients des diverses indéterminées qui entrent dans l'expression d'une même inconnue x_k ont pour plus grand commun diviseur le plus grand commun diviseur de tous les coefficients de la proposée, sauf le coefficient a_k.

Les indéterminées qui entrent dans l'expression de x_k, dans les formules (29), ont pour coefficients les nombres $\beta_k, \gamma_k, \delta_k, \ldots \rho_k$.

Soit π le plus grand commun diviseur de tous les coefficients de la proposée, sauf le coefficient a_k.

La seconde des égalités (30) contient le terme $a_k\beta_k$, et comme tous les autres termes de cette égalité sont divisibles par π, $a_k\beta_k$ est divisible par ce nombre ; mais a_k est premier avec π, sans quoi tous les coefficients de la proposée auraient un diviseur commun. Donc β_k est divisible par π.

La troisième des relations (30) ferait voir de même que γ_k est divisible par π ; et on démontrerait d'une manière analogue que les autres quantités $\delta_k, \ldots \rho_k$ sont aussi divisibles par π.

De plus, π sera le plus grand commun diviseur de β_k, γ_k, $\delta_k, \ldots \rho_k$.

En effet, soit, s'il est possible, le produit $\pi\pi_1$ le plus grand commun diviseur de ces nombres.

Parmi les égalités (30), nous avons celle-ci :

$$a_{k-1}\rho_{k-1} + a_k i_k + a_{k+1} i_{k+1} + \ldots + a_n i_n = 0, \quad (66)$$

ou

$$\frac{a_{k-1}}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_{k-2}} + \frac{a_k}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_{k-1}} i_k + \frac{a_{k+1}}{\rho_1\rho_2\cdots{}_{k-1}} i_{k+1} + \ldots + \frac{a_n}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_{k-1}} i_n = 0, \quad (67)$$

ρ_k étant le plus grand commun diviseur des coefficients $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_n$, divisés d'abord par le produit $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{k-1}$, et étant divisibles par $\pi\pi_1$, toutes les quantités $\dfrac{a_{k+1}}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_{k-1}}$, $\ldots$ $\dfrac{a_n}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_{k-1}}$ sont divisibles par $\tau\tau_1$, et, par conséquent

aussi les nombres a_{k+1}, a_{k+2}, ... a_n ; i_k est aussi divisible par $\pi\pi_1$ par hypothèse. Donc $\pi\pi_1$ divise aussi $\dfrac{a_{k-1}}{\rho_1\rho_2 \cdots {}_{k-2}}$ et, par conséquent, a_{k-1}.

L'égalité précédente nous donnerait de même

$$a_{k-2}\rho_{k-2} + a_{k-1}\theta_{k-1} + a_k\theta_k + a_{k+1}\theta_{k+1} + \ldots + a_n\theta_n = 0 \quad (68)$$

ou

$$\frac{a_{k-2}}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-3}} + \frac{a_{k-1}}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-2}}\theta_{k-1} + \frac{a_k}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-2}}\theta_k + \ldots$$
$$+ \frac{a_n}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-2}}\theta_n = 0. \quad (69)$$

Tous les termes de (69) sont divisibles par $\pi\pi_1$, sauf le premier; donc $\pi\pi_1$ divise $\dfrac{a_{k-2}}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-3}}$, et, par suite, a_{k-2}.

En continuant ce raisonnement, on arrivera à cette conclusion, que tous les coefficients de l'équation proposée, sauf le coefficient a_k, sont divisibles par $\pi\pi_1$. Or, cette conclusion est absurde, puisque, par hypothèse, π est le plus grand commun diviseur de ces coefficients. On ne peut donc supposer que π, qui divise tous les coefficients des diverses indéterminées qui figurent dans l'expression de K_1, ne soit par le plus grand commun diviseur de ces coefficients.

24. — Il paraît singulier que les inconnues, qui ont toutes, dans l'équation générale, un rôle identique, soient exprimées, dans les formules (29), par des valeurs dont l'une dépend d'une seule arbitraire; une autre de deux, une troisième de trois, etc.; ce qui semblerait indiquer qu'elles n'ont pas toutes le même degré d'indétermination.

Il n'en est pas ainsi, comme nous allons le faire voir.

Prenons, pour plus de simplicité, les formules (12) :

$$x_1 = \alpha_1 + \rho_1 t,$$
$$x_2 = \alpha_2 + \beta_2 t + \frac{a_3}{\rho_1} t_1,$$
$$x_3 = \alpha_3 + \beta_3 t - \frac{a_2}{\rho_1} t_1.$$

Si nous donnons à t ou à x_1 une valeur numérique, les expressions x_2 et x_3 dépendront de la seule arbitraire t_1, et

les valeurs de chacune de ces inconnues formeront une progression par différence.

Il en serait de même, si nous donnions à x_2 une valeur numérique choisie, bien entendu, parmi celles qui satisfont à l'équation; t et t' pourraient être exprimés au moyen d'une indéterminée θ, et les valeurs de x_1 et x_3, exprimées en θ, seraient également les termes d'une progression par différence.

Le même raisonnement s'appliquerait aux formules (29).

La singularité signalée n'atteint, par suite, que la forme de ces valeurs, et laisse intact le degré d'indétermination nécessaire. Elle ne peut, par conséquent, être considérée que comme un avantage sous le rapport de la simplicité.

Les formules (2) donnent lieu à une remarque analogue. En effet, dans ces formules, l'inconnue x_1 a, pour le coefficient de l'indéterminée, le coefficient de l'autre inconnue, x_2, dans l'équation, *pris avec son signe*, tandis que l'inconnue x_2 a, pour coefficient de l'indéterminée, le coefficient de x_1, dans l'équation, *pris en signe contraire.*

Ces deux inconnues, qui ont le même rôle dans l'équation, ne paraissent pas traitées de la même manière, et, dans leur nature, on ne trouve aucune raison pour expliquer cette différence. Mais cette difficulté n'est qu'apparente, car nous pouvons mettre à volonté l'une ou l'autre des deux inconnues dans l'un ou l'autre cas.

25. — Il est bien évident, du reste, que, dans les formules (29), la singularité peut affecter telles inconnues que l'on veut, c'est-à-dire que l'on peut choisir à volonté l'inconnue dont l'expression dépendra d'une seule arbitraire, de deux, ou de trois, etc.

On peut même transformer les formules (29) en d'autres dans lesquelles une inconnue quelconque, x_k, par exemple, serait exprimée au moyen d'une seule indéterminée θ.

Il suffirait de poser l'équation

$$\alpha_k + \beta_k t_1 + \gamma_k t_2 + \delta_k t_3 + \dots + \rho_k t_k = \alpha_k + \pi\theta. \quad (70)$$

Le terme tout connu est le même dans les deux membres, puisque c'est la première valeur de la même inconnue;

π est le plus grand commun diviseur de tous les coefficients de l'équation, sauf celui de l'inconnue x_k; π est aussi le plus grand commun diviseur des coefficients du premier membre de (70), d'après le n° 23.

En supprimant le terme commun α_k et divisant les deux membres par π, nous aurons

$$mt_1 + nt_2 + \ldots + rt_k = \theta,$$

équation qui peut toujours être résolue en nombres entiers, soit que l'on donne les valeurs de t_1, t_2, ... t_k, puisque le coefficient de θ est l'unité; soit que l'on donne la valeur de θ, puisque les coefficients m, n, ... r sont premiers entre eux.

Il résulte de là que les valeurs de chaque inconnue forment une progression par différence, dont la raison est le plus grand commun diviseur des coefficients de toutes les autres dans la proposée.

Les valeurs des n inconnues forment donc n progressions par différence, et ces n progressions ont chacune leur différence. Ces n différences sont premières entre elles, si on les considère deux à deux; car un diviseur commun à deux de ces différences diviserait tous les coefficients de la proposée.

(A suivre.)

QUESTION 100

Solution par M. Charles Derigny, élève au Lycée Louis-le-Grand.

On donne un triangle équilatéral ABC *et une parallèle* DE *à la base. Soit* M *un point de cette parallèle; les droites qui joignent ce point aux trois sommets déterminent six segments sur les côtés. Déterminer la position du point* M *de façon que le produit de trois segments non consécutifs ait une valeur donnée.*

MISE EN ÉQUATIONS DU PROBLÈME

Soit $AB = a$, $DE = b$; et appelons x la distance du point M au milieu de DE.

$OM = x$.

Nous voulons avoir :

$$BA' \times CB' \times AC' = K^3.$$

Calculons BA', CB' et AC' en fonction des données.

Les deux triangles semblables ABA' et ADM nous donnent la relation

$$\frac{BA'}{DM} = \frac{BA}{DA}, \quad BA' = DM \times \frac{BA}{DA}.$$

Donc

$$BA' = \left(x + \frac{b}{2}\right)\frac{a}{b} \quad (1).$$

Calculons B'C. Pour cela par le point B' menons B'F parallèle à BC; on a

$$BF = CB'.$$

Les deux triangles semblables BDM et BB'F nous donnent la relation :

$$\frac{BF}{BD} = \frac{B'F}{DM}$$

ou, en remplaçant par les valeurs,

$$\frac{B'C}{a-b} = \frac{a - B'C}{\frac{b}{2} + x} = \frac{a}{a + x - \frac{b}{2}}.$$

Donc

$$B'C = \frac{a(a-b)}{a + x - \frac{b}{2}}. \qquad (2)$$

Calculons enfin AC'.

$AC' = a - BC'$.

Les deux triangles DC'M et BCC' nous donnent

$$\frac{BC'}{BC' - BD} = \frac{BC}{DM} \qquad \frac{BC'}{BC' - a + b} = \frac{a}{x + \frac{b}{2}}$$

$$\frac{BC'}{b-a} = \frac{a}{x + \frac{b}{2} - a}.$$

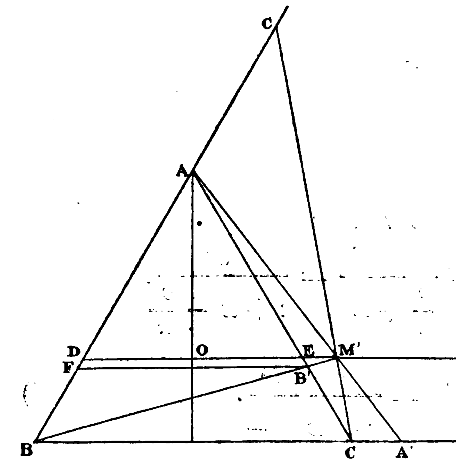
Donc

$$AC' = a - \frac{a(b-a)}{x+\frac{b}{2}-a} = \frac{a\left(x-\frac{b}{2}\right)}{x+\frac{b}{2}-a}. \qquad (3)$$

Ce qui donne l'équation du problème :

$$\frac{a}{b}\left(x+\frac{b}{2}\right) \times \frac{a(a-b)}{a+x-\frac{b}{2}} \times \frac{a\left(x-\frac{b}{2}\right)}{x+\frac{b}{2}-a} = K^3. \quad (4)$$

Considérons les différentes positions que peut occuper le point M.



Supposons le en M'; et calculons encore BA', CB', AC'. Soit $OM = y$.

Les 2 triangles ABA' et ADM' nous donnent :

$$\frac{BA'}{DM'} = \frac{BA}{DA}.$$

$$BA' = \left(y+\frac{b}{2}\right) \times \frac{a}{b} \qquad (1')$$

Donc rien de changé pour cette ligne.

Calculons CB'; en menant B'F parallèle à BC, les deux triangles BB'F et BM'D nous donnent

$$\frac{BF}{BD} = \frac{FB'}{DM'}$$

ou

$$\frac{B'C}{a-b} = \frac{a-B'C}{y+\frac{b}{2}}.$$

Il n'y a donc encore rien de changé.

Considérons enfin la valeur de AC'.

$AC' = BC' - a.$

Or les deux triangles semblables C'BC et C'DM' nous donnent

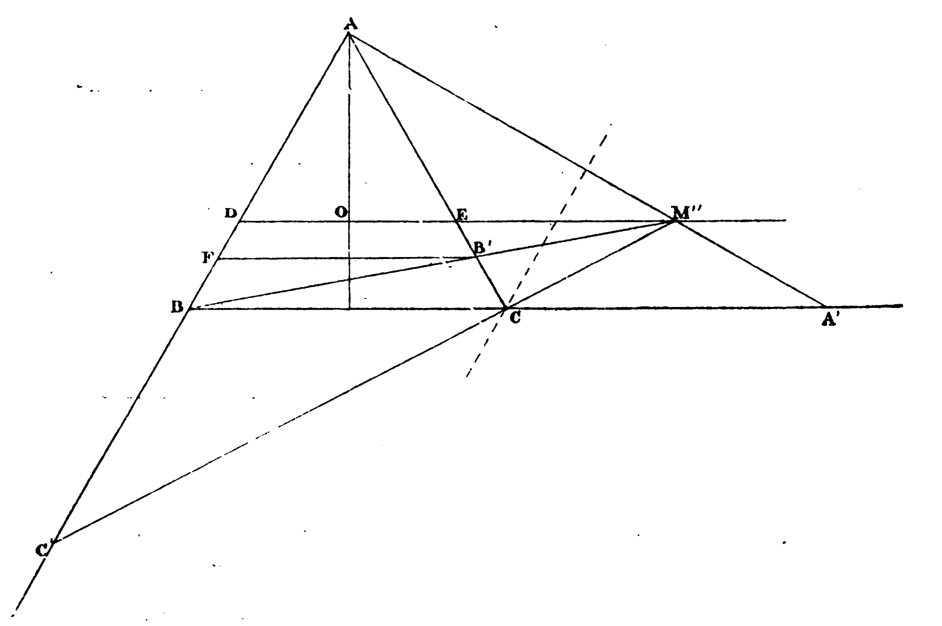
$$\frac{BC'}{CD'} = \frac{BC}{DM'} \qquad \frac{BC'}{BC' - BD} = \frac{BC}{DM'}$$

$$\frac{BC'}{BC' - a + b} = \frac{a}{y + \frac{b}{2}} \qquad \frac{BC'}{b - a} = \frac{a}{y + \frac{b}{2} - a}.$$

Donc

$$AC' = \frac{a(b-a)}{y + \frac{b}{2} - a} - a = \frac{a\left(\frac{b}{2} - y\right)}{y + \frac{b}{2} - a}.$$

On voit que la valeur de AC' diffère par le signe de



celle précédemment trouvée; nous avons donc une équation nouvelle.

Mais en remarquant ce qui précède, on peut poser $BA'.\ CB'.\ AC' = -K^3$ et l'on aura la même équation (4) dans laquelle on aura changé K^3 en $-K^3$.

Considérons le cas où le point M est plus éloigné à droite au delà de la parallèle à AB menée par le point C, en M″ par exemple et calculons de nouveau les lignes.

Soit $OM'' = z$.

On voit directement que pour BA′ il n'y aura rien de nouveau en considérant les deux triangles ABA′ et AM″D.

Considérons la valeur de CB′, en menant toujours par le point B′ une parallèle B′F à BC.

Les deux triangles B′BF et BDM″ nous donnent la relation

$$\frac{BF}{BD} = \frac{FB'}{DM''}, \qquad \frac{CB'}{a-b} = \frac{a - CB'}{z + \frac{b}{2}}.$$

Donc, rien de changé.

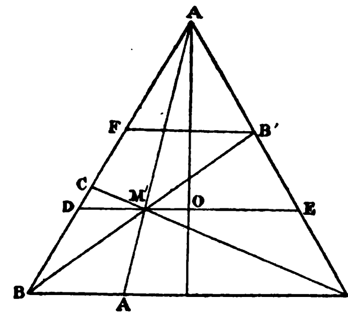
Enfin considérons AC′.

$AC' = a + C'B.$

Les deux triangles C′CB et C′M″D nous donnent la relation

$$\frac{C'B}{C'D} = \frac{BC}{DM''}, \qquad \frac{C'B}{C'B + a - b} = \frac{a}{z + \frac{b}{2}}$$

$$\frac{BC'}{a-b} = \frac{a}{z + \frac{b}{2} - a}.$$



Donc

$$AC' = a + \frac{a(a-b)}{z + \frac{b}{2} - a}$$

$$= \frac{a\left(z - \frac{b}{2}\right)}{z + \frac{b}{2} - a}.$$

Ce qui est la même valeur que pour le premier cas.

Considérons maintenant les différentes positions que le

point M peut occuper à gauche du point O, supposons-le compris entre O et D

Soit $OM_1 = x_1$.

Les deux triangles ABA′ et ADM_1 donnent la relation

$$\frac{BA'}{DM_1} = \frac{BA}{DA}$$

$$BA' = \left(\frac{b}{2} - x_1\right)\frac{a}{b}. \qquad (1)$$

Par B′ menons B′F parallèle à BC; on a

$$\frac{BF}{BD} = \frac{FB'}{DM'}, \qquad \frac{B'C}{a-b} = \frac{a - B'C}{\frac{b}{2} - x_1} = \frac{a}{a - \frac{b}{2} - x_1}$$

$$B'C = \frac{a(a-b)}{a - \frac{b}{2} - x_1}. \qquad (2)$$

Enfin on calculerait de même AC′.

Il est facile de voir que nous aurions l'équation (4) dans laquelle on aurait changé x en $-x$.

Par conséquent, nous saurons interpréter les solutions négatives de l'équation 4.

Considérons le point M plus à gauche en M_2 et soit $OM_2 = x_2$.

On a $$BA' = \left(-\frac{b}{2} + x_2\right)\frac{a}{b}.$$

Calculons CB′.

Par le point B menons une parallèle à BC jusqu'à sa rencontre avec AB prolongée en F.

BF = B′C.

Les deux triangles BB'F et BDM_2 nous donnent

$$\frac{BF}{BD}=\frac{B'F}{M_2D}$$

Or

$$B'F = B'A = B'C - A.$$

Donc

$$\frac{B'C}{a-b}=\frac{B'C-a}{-\frac{b}{2}+x_2}=\frac{a}{a-\frac{b}{2}-x_2}$$

$$B'C = \frac{a(a-b)}{a-\frac{b}{2}-x_2}.$$

Enfin calculons AC'.

$AC' = a - BC'$.

Les deux triangles M_2DC' et BCC' nous donnent

$$\frac{BC'}{C'D}=\frac{BC}{M_2D}$$

$$\frac{BC'}{BD-BC'}=\frac{BC}{M_2D}$$

$$\frac{BC'}{a-b-BC'}=\frac{a}{-\frac{b}{2}+x_2},\qquad \frac{BC'}{a-b}=\frac{a}{-\frac{b}{2}+x_2+a}.$$

Donc

$$AC' = a - \frac{a(a-b)}{-\frac{b}{2}+x_2+a}=\frac{a\left(x_2+\frac{b}{2}\right)}{a+x_2-\frac{b}{2}},$$

qu'on peut écrire

$$\frac{a\left(-x_2-\frac{b}{2}\right)}{\frac{b}{2}-x_2-a}.$$

On voit donc que si l'on change x en $-x$, AC' et B'C reprennent les mêmes valeurs que dans le premier cas; mais BA' est de signe contraire.

Il suffira de changer K^3 en $-K^3$, et nous pourrons accepter les solutions négatives de l'équation ainsi formée.

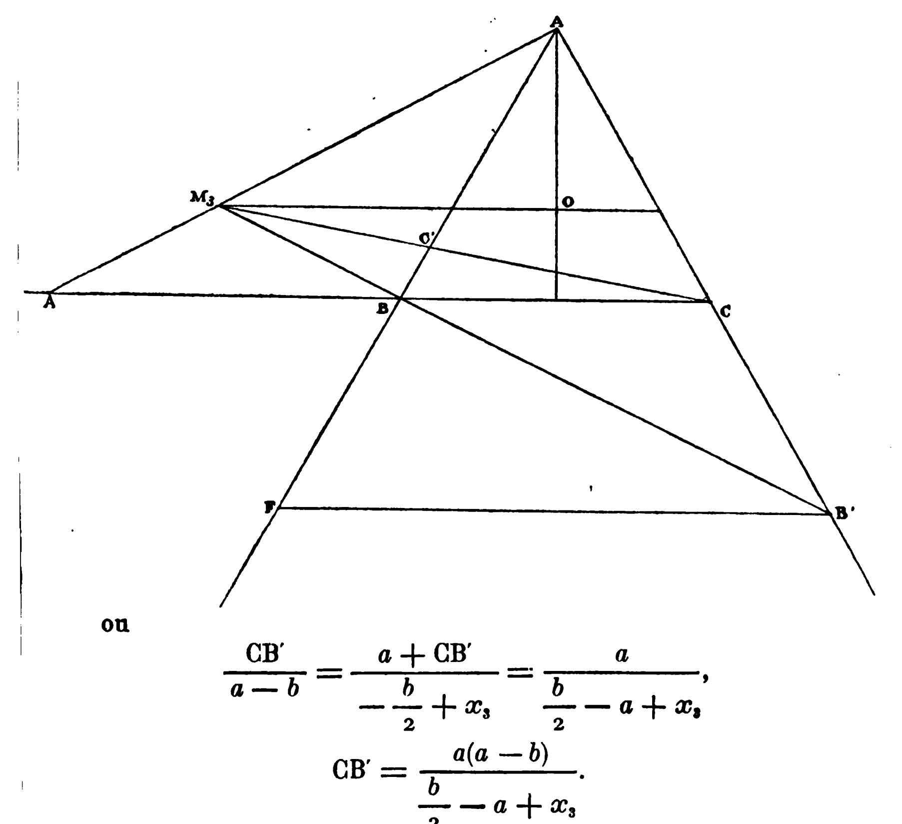
Il ne nous reste plus qu'un cas à considérer, celui où le point M serait plus à gauche, en M_3.

Soit $OM_3 = x_3$.

$$BA' = \left(-\frac{b}{2} + x_3\right)\frac{a}{b}.$$

Les deux triangles BB'F et M_3BD donnent

$$\frac{BF}{BD} = \frac{B'F}{M_3D}$$



ou

$$\frac{CB'}{a-b} = \frac{a + CB'}{-\frac{b}{2} + x_3} = \frac{a}{\frac{b}{2} - a + x_3},$$

$$CB' = \frac{a(a-b)}{\frac{b}{2} - a + x_3}.$$

Enfin les deux triangles $C'M_3D$ et BCC' nous donnent

$$\frac{BC'}{C'D} = \frac{BC}{M_3D}$$

$$\frac{BC'}{BD - BC'} = \frac{BC}{M_3D}$$

$$\frac{BC'}{a - b - BC'} = \frac{a}{x_3 - \frac{b}{2}}$$

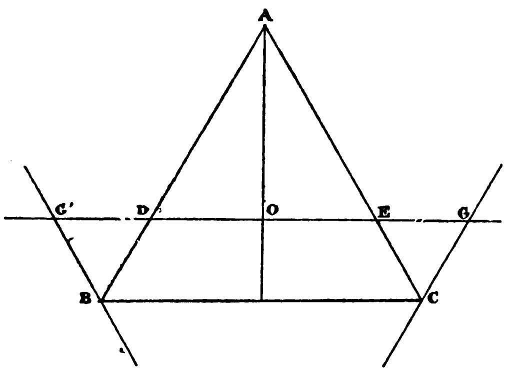
$$\frac{BC'}{a - b} = \frac{a}{x_3 - \frac{b}{2} + a}.$$

Donc

$$AC' = a - \frac{a(a - b)}{x_3 - \frac{b}{2} + a} = \frac{a\left(x_3 + \frac{b}{2}\right)}{x_3 - \frac{b}{2} + a}.$$

Si l'on change x en $-x$, on trouvera l'équation (4); car BA' et CB' ayant tous deux changé de signe, le produit aura le même signe.

Ainsi, en résumé, soit CG parallèle à AB, BG_1 à AC.



Si M est entre O et E, ou à droite de G : solutions positives de l'équation (4).

Si M est entre O et D, ou à gauche de G_1 : solutions négatives de l'équation (4).

Si M est entre E et G, solutions positives de l'équation où on change K^3 en $-K^3$; solutions négatives de cette même équation, si le point M est entre D et G_1.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION (4)

$$\frac{a}{b}\left(x + \frac{b}{2}\right) \times \frac{a(a - b)}{a + x - \frac{b}{2}} \times \frac{a\left(x - \frac{b}{2}\right)}{x - \frac{b}{2} - a} = K^3.$$

Posons $K^3 = ma^3$, le facteur a^3 disparaît, et il reste

$$\frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)\left(a-b\right)\left(x-\frac{b}{2}\right)}{b\left(a+x-\frac{b}{2}\right)\left(x+\frac{b}{2}-a\right)}=m.$$

Cette équation, réduite, devient

$$4x^2(b-a+mb)-(b-a)(b^2-4mab)-mb^3=0.$$

d'où

$$x=\pm\sqrt{\frac{(b-a)(b^2-4mab)+mb^3}{4(b-a+mb)}}.$$

(A suivre.)

CONCOURS DE L'ÉCOLE FORESTIÈRE EN 1884

Mathématiques.

1. — Étant données deux droites non situées dans le même plan, déterminer le lieu géométrique des milieux de toutes les droites qui joignent un point de la première droite à un point de la seconde. — Indiquer la marche à suivre pour représenter ce lieu à l'aide des procédés de la géométrie descriptive.

2. — Trouver, par la suppression des facteurs communs, c'est-à-dire sans employer le procédé de la division directe, le quotient de l'expression

$$\frac{a^9-ax^8+a^8x-a^9}{a^5-ax^4+a^4x-x^5+\sqrt{2}(a^4x-a^2x^3+a^3x^2-ax^4)}.$$

3. — L'escompte d'un billet de 2,460 francs est 67 fr. 65 c. Si l'échéance était rapprochée de 55 jours et le taux augmenté de 1,5 o/o, l'escompte resterait le même. — Trouver le taux et l'échéance.

Trigonométrie.

1. — On donne, dans un quadrilatère inscriptible ABCD :

$$B = 87°38'47'',$$
$$a = 713^m,68576,$$
$$b = 557,34875,$$
$$d - c = 50,35500;$$

calculer d, c, A, R et S.

2. — Variations de

$$\frac{(1 + \sin x)^2}{\sin x(1 - \sin x)}.$$

3. — Un paratonnerre AB, d'une longueur égale à $8^m,264$, est placé sur un édifice de hauteur AE. En s'arrêtant à $82^m,656$ du pied de l'édifice, et à une hauteur de $15^m,467$ au-dessus du sol, on a vu le paratonnerre sous un angle de $4°27'54'',27$, On demande de calculer la hauteur de la pointe B du paratonnerre au-dessus du sol.

CONCOURS GÉNÉRAL

Mathématiques élémentaires.

On donne un cercle O, et sur ce cercle deux points A, A'. On considère tous les couples de deux cercles C, C', tangents entre eux et tangents au cercle O, le premier en A, le second en A'.

1. Trouver le lieu du point de contact des cercles C, C'; puis, prenant un point sur ce lieu, reconnaître d'après la position de ce point sur le lieu, le mode de contact des cercles C et C' qui correspondent à ce point, et le mode de contact de chacun d'eux avec le cercle O.

2. Trouver le lieu du point de concours des tangentes communes extérieures aux cercles C et C' d'un même couple.

3. A un point N du lieu précédent correspondent deux couples de cercles C et C'. Soit M le contact des cercles de l'un de ces couples, et soit M' le point de contact des cercles de l'autre couple. On considère le triangle NMM'.

Trouver le lieu du centre du cercle inscrit dans ce triangle; le lieu du centre du cercle circonscrit ; le lieu du point de concours des hauteurs. Vérifiez que tout point commun à deux de ces trois lieux appartient à l'autre.

4. Soit R le rayon du cercle O, et θ l'angle des rayons de ce cercle terminés en A et A'.

Calculer les rayons d'un couple de cercles C et C' tels que le rapport de la somme des aires de ces cercles à l'aire du cercle O, soit égal à un nombre donné *m*. — Discuter le problème dans le cas particulier où θ est droit, et reconnaître, pour chaque solution, selon la valeur de *m*, le mode de contact des cercles C et C', et le mode de contact de chacun d'eux avec le cercle O.

Philosophie.

Étant donné un triangle ABC, et une droite L non située dans le plan du triangle, on joint aux points B et C un point quelconque D de la droite L, de façon à former un quadrilatère DBAC, dont les côtés ne sont pas nécessairement dans un même plan.

1. Démontrer que le quadrilatère qui a pour sommets les points milieux des côtés du quadrilatère DBAC est un parallélogramme.

2. Étudier les variations de la surface de ce parallélogramme quand le point D se déplace sur la droite.

3. Trouver la position que le point D doit occuper sur la droite L pour que le parallélogramme soit un losange ou un rectangle.

4. Examiner si ce parallélogramme peut devenir un carré.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PARIS

Un corps pesant tombe, sans vitesse initiale, du sommet d'une tour. Trouver la hauteur de la tour et la durée de la chute, sachant que; dans la dernière seconde, le corps a parcouru la moitié de la hauteur totale.

— Trouver l'angle des diagonales d'un cube.

— Dans une parabole, le sommet est A, et la directrice DD'. Du point A, on mène la perpendiculaire $AB = a$ sur la directrice. Par le pied B de cette perpendiculaire, on mène une droite BMM' faisant avec AB un angle α, et rencontrant la parabole en M et M'. Calculer, au moyen des données, les longueurs $BM = r$, $BM' = r'$. Discussion.

— Dans un triangle rectangle ABC, une droite BI détermine sur le côté AC deux segments AI et IC. On connaît $IC = l$, $CBI = \alpha$, $IBA = \beta$. Calculer le segment AI par une formule logarithmique.

— Aux trois sommets A, B, C d'un triangle, on applique des forces respectivement dirigées suivant AB, BC, CA et proportionnelles à ces côtés ; chercher si ces forces se font équilibre. S'il n'y a pas équilibre, les ramener à deux forces dont l'une passe par le point A.

— Dans un tronc de cône, on connaît le rayon R de la grande base, la hauteur h, et l'on sait que l'apothème est la somme des deux rayons. Déterminer la surface totale et le volume.

— Calculer le segment d'un cercle compris entre deux cordes parallèles, l'une étant le côté du carré inscrit, et l'autre égale au rayon.

— Trouver le volume engendré par un triangle équilatéral tournant autour d'un axe passant par un sommet et perpendiculaire à l'un des côtés aboutissant à ce sommet. Le côté du triangle équilatéral est égal à a.

— La longueur AB d'un plan incliné est 60 mètres; la hauteur AC est 30 mètres. Combien de temps un mobile pesant mettra-t-il à parcourir la longueur AB.

— Résoudre le problème d'équations simultanées

$$\sin x + \sin y = \sin \alpha$$
$$\cos x + \cos y = 1 + \cos \alpha.$$

— Étant donnés les trois côtés a, b, c d'un triangle, mener une sécante DE parallèle au côté a, de façon que le trapèze BCED ainsi formé ait un périmètre donné $2l$.

— Résoudre l'équation

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

— Étant donnés la surface S d'un parallélogramme et les volumes V et V' qu'il engendre en tournant successivement autour de ses deux côtés, calculer les grandeurs x et y de ces côtés, et le sinus de l'angle φ qu'ils forment entre eux. Voir comment peut varier S lorsque V et V' restent fixes.

— Étant données les longueurs a et b de deux cordes parallèles, et leur distance d, calculer le rayon du cercle.

— On donne, dans un triangle, la base a, l'angle opposé A, et la somme k^2 des carrés des deux autres côtés b et c. On demande de calculer b, c, et $\sin \frac{B - C}{2}$. En supposant donnés a et A, déterminer entre quelles limites peut varier k^2 pour que le problème soit possible.

QUESTIONS PROPOSÉES

159. — Construire un triangle, connaissant l'angle A, la somme $b + c$ des côtés qui comprennent cet angle, et un point I du côté qui lui est opposé.

160. — Soit N un nombre impair, égal à la somme de deux carrés, et composé de n facteurs premiers, égaux ou inégaux. Le carré de N est :

1° La somme de deux carrés (propriété évidente et connue);

2° La somme de trois carrés;

3° La somme de quatre carrés;

. . . .

4° La somme de $(n+1)$ carrés. *(E. Catalan.)*

161. — Couper un triangle par une droite de manière que les deux parties de ce triangle soient entre elles dans un rapport donné, et qu'elles aient leur centre de gravité sur une même perpendiculaire à la sécante. On résoudra ce problème : 1° lorsque les deux côtés du triangle sont égaux, et en particulier quand le triangle est équilatéral; 2° quand le triangle est quelconque. *(Conc. gén. 1833.)*

162. — Une droite AD représente, en grandeur et en situation, la bissectrice d'un triangle ABC; on suppose en outre que le rapport de AB à AC conserve une valeur constante, et l'on demande le lieu décrit par le point B et par le point C. On trouvera que ce lieu est constitué par deux droites perpendiculaires à AB, et la partagent harmoniquement. Déduire de cette remarque des applications diverses. Exemple : Construire un triangle connaissant: 1° la bissectrice; 2° le rapport des deux côtés qui la comprennent; 3° une troisième condition qui peut être tantôt une hauteur, tantôt une médiane, etc. *(G. L.)*

163. — Inscrire dans un triangle ABC trois rectangles, reposant chacun sur un côté, et tels que leurs diagonales soient égales et passent par un même point.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 19878-4.

ETUDE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Ferrent.**

(*Suite*, voir p. 169.)

26. — Nous avons déjà remarqué (nº 19) que les formules de résolution d'une équation indéterminée peuvent être présentées sous des formes très diverses.

Nous avons signalé les deux formes suivantes pour l'équation à deux inconnues :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 \pm a_2 t \\ x_2 = \alpha_2 \mp a_1 t \end{array}\right\} \qquad (71)$$

Pour l'équation à trois inconnues, nous avons trouvé les formules (12), dans lesquelles nous pouvons changer d'abord les signes de tous les termes qui contiennent l'indéterminée t; ceux des termes qui contiennent l'indéterminée t_1; enfin, nous pouvons faire ces deux changements simultanément.

Nous aurons ainsi quatre formes.

Mais nous pourrions aussi écrire des formules analogues, dans lesquelles l'inconnue x_2 ou x_3 ne dépendrait que d'une seule indéterminée, comme il arrive à l'inconnue x_1 dans les formules (12).

Ces deux nouvelles formes, susceptibles également des changements signalés ci-dessus, nous donneraient en tout douze formes.

Dans l'équation à quatre inconnues, les formules peuvent être écrites d'un bien plus grand nombre de manières : car outre les changements analogues à ceux que nous venons de citer, et qui donneraient 96 manières, nous avons encore la forme (60), et celles qui peuvent en dériver.

27. — Il est naturel de se demander dès lors si les constantes des formules (71), qui donnent l'expression des valeurs des inconnues de l'équation à deux inconnues, ne

peuvent prendre aucune valeur en dehors des deux valeurs qui figurent dans ces formules.

A cet effet, posons

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 + Mt \\ x_2 = \alpha_2 + Nt \end{array}\right\} \qquad (72)$$

α_1, α_2, M et N étant quatre inconnues.

Pour que les formules (72) puissent remplir l'objet proposé, elles doivent satisfaire à deux conditions :

1° Les valeurs qu'elles donneront aux inconnues, x_1 et x_2 devront toutes satisfaire à l'équation (1) ;

2° Toute valeur de x_1 et x_2 satisfaisant à la proposée devra être donnée par ces formules, ce qui sera vérifié, si la valeur correspondante de t est entière.

Portons les expressions (72) dans l'équation (1) :

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + (a_1 M + a_2 N)\, t = K.$$

Cette équation devant être satisfaite pour toute valeur de t, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = K \\ a_1 M + a_2 N = 0 \end{array}\right\} \qquad (73)$$

et

Retranchons de l'équation (1) la première des équations (73) :

$$a_1(x_1 - \alpha_1) + a_2(x_2 - \alpha_2) = 0. \qquad (74)$$

La première des équations (73) fait voir que α_1 et α_2 ne peuvent être qu'une première solution de la proposée.

La seconde des équations (73) et l'équation (74) peuvent être résolues, chacune en particulier, au moyen des formules (2), car nous savons que ces formules donnent toutes les solutions.

On obtient ainsi

$$\left.\begin{array}{ll} M = a_2\theta, & x_1 - \alpha_1 = a_2\varphi \\ N = -a_1\theta, & x_2 - \alpha_2 = -a_1\varphi \end{array}\right\} \qquad (75)$$

L'une des équations (72), résolue par rapport à t, donne

$$t = \frac{x_1 - \alpha_1}{M} = \frac{\varphi}{\theta}.$$

La seconde des équations (72) conduirait au même résultat.

La seconde condition exige que t soit entier ; or, φ, qui est l'indéterminée des inconnues de la proposée, doit pouvoir prendre toute valeur entière, et notamment la valeur 1. Le

quotient $\frac{\varphi}{\theta}$ devant rester entier pour toutes les valeurs de φ, θ ne peut avoir d'autres valeurs que celles-ci :

$$\theta = \pm 1.$$

Par suite,

$$M = \pm a_2, \qquad N = \mp a.$$

Nous obtenons ainsi les deux résultats connus (71), et nous voyons qu'il ne peut en exister d'autres.

28. — Nous pouvons résoudre une question analogue au sujet de l'équation à trois inconnues. Nous pouvons chercher s'il n'existerait pas des formules donnant d'une manière semblable les valeurs des trois inconnues, dont l'expression serait ainsi exempte de la singularité citée au n° 24.

L'équation proposée étant

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = K, \tag{76}$$

les expressions cherchées seront de la forme

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + Mt + Nt_1 \\ x_2 &= \alpha_2 + M_1t + N_1t_1 \\ x_3 &= \alpha_3 + M_2t + N_2t_1 \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

contenant neuf inconnues α_1, α_2, α_3, M, M_1, M_2, N, N_1, N_2.

Portons ces expressions dans l'équation (76); t et t_1 devant rester indéterminées, il viendra :

$$\left.\begin{aligned} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 &= K \\ a_1M + a_2M_1 + a_3M_2 &= 0 \\ a_1N + a_2N_1 + a_3N_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Retranchons de (76) la première des équations (78) :

$$a_1(x_1 - \alpha_1) + a_2(x_2 - \alpha_2) + a_3(x_3 - \alpha_3) = 0. \tag{79}$$

La première des équations (78) fait voir que les quantités α_1 α_2 α_3 ne peuvent être qu'une première solution de la proposée.

Résolvons les deux dernières équations (78) et l'équation (79) au moyen des formules (12) :

$$\left.\begin{aligned} M &= \rho\theta \\ M_1 &= m\theta + \frac{a_3}{\rho}\theta_1 \\ M_2 &= n\theta - \frac{a_2}{\rho}\theta_1 \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

$$\left.\begin{aligned} N &= \rho\varphi \\ N_1 &= m\varphi + \frac{a_3}{\rho}\,\varphi_1 \\ N_2 &= n\varphi - \frac{a_2}{\rho}\,\varphi_1 \end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - \alpha_1 &= \rho\sigma \\ x_2 - \alpha_2 &= m\sigma + \frac{a_3}{\rho}\,\sigma_1 \\ x_3 - \alpha_3 &= n\sigma - \frac{a_2}{\rho}\,\sigma_1 \end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

Les équations (77) nous donnent d'ailleurs, pour valeur de t et t_1 :

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{N_1(x_1 - \alpha_1) - N(x_2 - \alpha_2)}{MN_1 - NM_1} \\ t_1 &= \frac{M(x_2 - \alpha_2) - M_1(x_1 - \alpha_1)}{MN_1 - NM_1} \end{aligned}\right\} \qquad (83)$$

Portons dans ces expressions les valeurs (80), (81) et (82); il vient :

$$t = \frac{\sigma\varphi_1 - \varphi\sigma_1}{\theta\varphi_1 - \varphi\theta_1}, \quad t_1 = \frac{\theta\sigma_1 - \sigma\theta_1}{\theta\varphi_1 - \varphi\theta_1}, \qquad (84)$$

σ et σ_1 étant les indéterminées de la résolution générale de l'équation (79) ou (76), peuvent prendre toute valeur entière, et notamment les valeurs o et 1. Il résulte de là que les quatre fractions

$$\frac{\varphi}{\theta\varphi_1 - \varphi\theta_1}, \quad \frac{\varphi_1}{\theta\varphi_1 - \varphi\theta_1}, \quad \frac{\theta}{\theta\varphi' - \varphi\theta'}, \quad \frac{\theta_1}{\theta\varphi_1 - \varphi\theta_1}$$

doivent se réduire à des nombres entiers.

Le produit des deux moyennes, diminué du produit des extrêmes, doit donc aussi être un nombre entier. Or, la différence de ces deux produits se réduit à

$$\frac{1}{\theta\varphi_1 - \varphi\theta_1}.$$

Nous aurons donc

$$\theta\varphi_1 - \varphi\theta_1 = \pm 1. \qquad (85)$$

Cette condition, qui est nécessaire, est aussi suffisante : car elle rend évidemment entières les valeurs de t et de t_1 (84).

L'équation (85), qui est du second degré à quatre inconnues, peut être résolue comme une équation du premier degré à deux inconnues, en considérant chacun des produits $\theta\varphi_1$ et $\varphi\theta_1$ comme une inconnue.

Nous aurons ainsi :

$$\theta\varphi_1 = \omega \pm 1,$$
$$\varphi\theta_1 = \omega;$$

d'où nous déduirons

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\omega}{\theta_1} \\ \varphi_1 &= \frac{\omega \pm 1}{\theta} \end{aligned}\right\} \qquad (86)$$

Ces résultats, portés dans les expressions (80) et (81), nous donneront les valeurs des coefficients, et les valeurs des inconnues seront :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \rho\theta t + \rho\left(\frac{\omega}{\theta_1}\right) t_1 \\ x_2 &= \alpha_2 + \left(m\theta + \frac{a_3}{\rho}\,\theta_1\right) t + \left[m\left(\frac{\omega}{\theta_1}\right) + \frac{a_3}{\rho}\left(\frac{\omega \pm 1}{\theta}\right) t_1\right] \\ x_3 &= \alpha_3 + \left(n\theta - \frac{a_2}{\rho}\,\theta_1\right) t + \left[n\left(\frac{\omega}{\theta_1}\right) - \frac{a_2}{\rho}\left(\frac{\omega \pm 1}{\theta}\right) t_1\right] \end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

et les quantités ω, θ, θ_1, sont entièrement arbitraires, sous la condition que les quotients $\frac{\omega}{\theta_1}$ et $\frac{\omega \pm 1}{\theta}$ soient des nombres entiers. Pour chaque valeur de ces trois indéterminées, les expressions (87) donnent toutes les solutions de la proposée.

On devra d'abord choisir la valeur de ω, puis opter entre les deux signes du terme ± 1 ; et enfin choisir θ_1 parmi les diviseurs de ω, et θ parmi ceux de $\omega \pm 1$.

On retrouverait les formules (12) en posant dans les formules (87) :

$$\theta t + \frac{\omega}{\theta_1} t_1 = u$$
$$\theta_1 t + \frac{\omega \pm 1}{\theta} t_1 = v.$$

Pour chaque valeur entière de t et t_1, on trouverait une valeur entière de u et v ; de plus, à chaque valeur entière

de u et v correspondra une valeur entière de t et t_1 : car en résolvant ces deux équations relativement à t et t_1, les valeurs de ces deux quantités se présenteront sous une forme fractionnaire dont le dénominateur commun sera

$$\theta \frac{\omega \pm 1}{\theta} - \theta_1 \frac{\omega}{\theta_1} = \pm 1.$$

29. — Nous trouvons dans les *Disquisitiones arithmeticæ*, de Gauss, le problème suivant, qui est fort connu:

Une fraction étant donnée $\frac{p}{q}$, dont le dénominateur q peut être décomposé en deux facteurs premiers entre eux, a et b, remplacer la fraction $\frac{p}{q}$ par la somme de deux fractions dont les dénominateurs soient les nombres a et b.

Nous ne résoudrons pas cette question ainsi posée, parce qu'elle est trop simple; nous la remplacerons par la suivante:

On donne une fraction $\frac{p}{q}$, dont le dénominateur q peut être décomposé en n facteurs a_1, a_2, ... a_n ; remplacer la fraction donnée par la somme de n fractions dont les dénominateurs soient les nombres a_1, a_2, ... a_n.

En appelant x_1, x_2, ... x_n les numérateurs cherchés, l'équation sera

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} + \ldots + \frac{x_n}{a_n} = \frac{p}{q}$$

ou

$$\frac{q}{a_1} x_1 + \frac{q}{a_2} x_2 + \frac{q}{a_3} x_3 + \ldots + \frac{q}{a_n} x_n = p. \quad (88)$$

La fraction donnée $\frac{p}{q}$ étant supposée irréductible, il n'existe aucun facteur commun entre la quantité p et les coefficients des inconnues, qui sont tous des nombres entiers.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (88) puisse être résolue est donc que les coefficients des inconnues n'aient aucun diviseur commun.

Or, il est facile de voir que, si deux quelconques des facteurs a_1, a_2, ... a_n, ont un diviseur commun, ce diviseur divisera tous les coefficients; il est donc nécessaire que tous ces facteurs soient premiers entre eux deux à deux.

Réciproquement, si les facteurs sont premiers entre eux deux à deux, les coefficients des inconnues de l'équation (88) n'ont aucun diviseur commun.

En effet, si ces coefficients avaient un diviseur commun, ils seraient divisibles par un nombre premier, ν, et ce nombre ν étant premier absolu devrait diviser l'un des facteurs des coefficients. Mais le même facteur ne figurant pas dans tous les coefficients, il faudrait donc que ν en divisât au moins deux, ce qui est contraire à l'hypothèse.

30. — Si la fraction proposée était $\frac{p}{a^n b^{n'}}$, a et b étant premiers entre eux, il n'y aurait qu'une manière de décomposer cette fraction, de sorte que les dénominateurs soient premiers entre eux, savoir :

$$\frac{x}{a^n}+\frac{y}{b^{n'}}=\frac{p}{a^n b^{n'}}.$$

Mais si le dénominateur donné $a^n b^{n'}$, au lieu d'être le produit des dénominateurs, doit être leur plus petit multiple, on peut poser

$$\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{a^2}+\ldots+\frac{x_n}{a^n}+\frac{y_1}{b}+\frac{y_2}{b^2}+\ldots+\frac{y_{n'}}{b^{n'}}=\frac{p}{a^n b^{n'}} \quad (89)$$

ou

$$\begin{aligned} &a^{n-1}b^{n'}x_1+a^{n-2}b^{n'}x_2+\ldots+b^{n'}x_n \\ &+a^n b^{n'-1}y_1+a^n b^{n'-2}y_2+\ldots+a^n y_{n'}=p. \quad (90)\end{aligned}$$

1° Il n'existe aucun diviseur commun entre les quantités connues de l'équation; 2° les coefficients des inconnues sont premiers entre eux, car les deux nombres a^n et $b^{n'}$, qui sont deux de ces coefficients, sont premiers entre eux.

Les deux coefficients a^n et $b^{n'}$ étant premiers entre eux, l'équation (90) pourra être résolue comme une équation à deux inconnues, conformément aux observations contenues dans le n° 20.

Les deux inconnues x_n, $y_{n'}$ seront seules assujetties à certaines conditions ; les autres seront entièrement arbitraires.

Une remarque semblable pourrait être faite au sujet de la décomposition de la fraction $\frac{p}{a^n b^{n'} c^{n''}}$ en fractions simples, a, b et c étant premiers entre eux deux à deux.

L'équation résultante pourrait être résolue comme une équation à trois inconnues, d'après le n° 20; et les inconnues seront entièrement arbitraires à l'exception des numérateurs des trois fractions dont les dénominateurs sont a^n, $b^{n'}$ et $c^{n''}$.

Nous aurions pu aussi comprendre, parmi les fractions qui figurent dans le premier membre de (89), des fractions de la forme $\frac{z}{a^\nu b^{\nu'}}$, ν et ν' étant respectivement inférieurs à n et n'. Les numérateurs inconnus de ces fractions resteraient aussi entièrement arbitraires.

31. — Les problèmes que nous avons résolus aux n°s 29 et 30 comportent une infinité de solutions, dans les cas que nous avons indiqués, où le problème peut être résolu.

Mais il faut alors entendre par somme de fractions la somme algébrique; c'est-à-dire que les inconnues peuvent prendre des valeurs positives ou négatives.

Si l'on demandait de décomposer une fraction en plusieurs autres dont la proposée soit la somme arithmétique, le nombre des solutions serait toujours limité, et quelquefois même il n'en existerait aucune dans le cas où la résolution algébrique est possible.

Cela résulte de ce que les premiers membres des équations (88) et (89) n'ont que des termes positifs, et que, dans ce cas, le nombre des solutions positives est toujours limité et quelquefois même nul.

Nous reviendrons plus loin sur cette partie de la question.

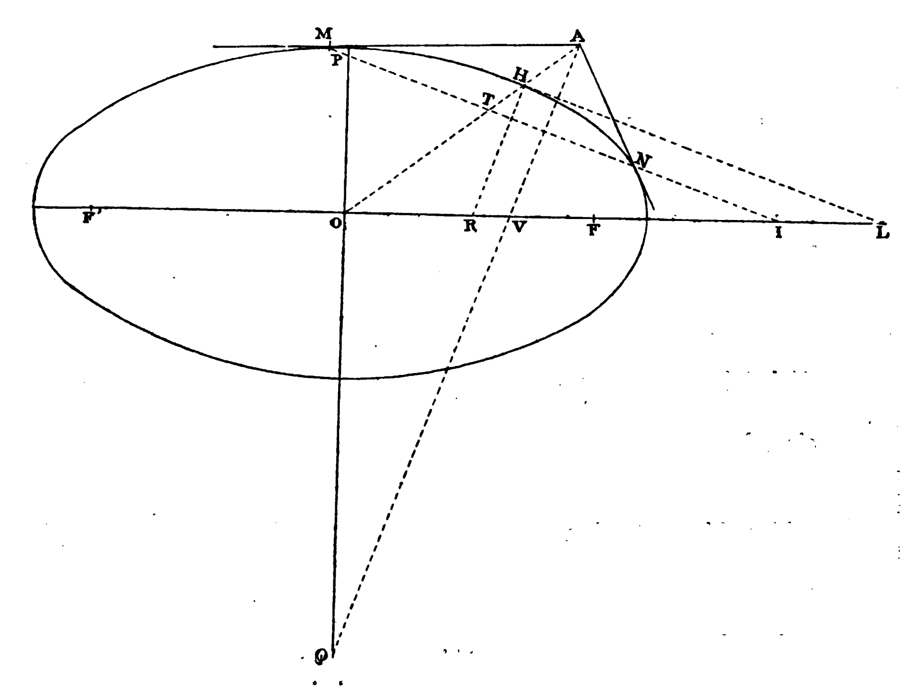
(A suivre.)

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

XL

Par un point A *on mène à une ellipse les deux tangentes* AM *et* AN *(*M *et* N *étant les points de contact);* MN *coupe le petit axe en* P *et la perpendiculaire abaissée de* A *sur* MN *coupe ce petit axe en* Q. *Démontrer que la circonférence décrite sur* PQ *comme diamètre passe par les foyers.*



Si F est l'un des foyers, il est évident qu'il suffit de démontrer la relation $FO^2 = OP.OQ$, O étant le centre de l'ellipse.

Joignons OA qui coupe MN en T et la courbe en H; la

tangente en H qui est parallèle à MN coupe l'axe focal en L; soit I le point où MN coupe l'axe, V le point où AQ coupe l'axe; par H menons une parallèle à AQ qui coupe l'axe en R (c'est la normale en H).

Les deux triangles semblables OVQ, POI donnent

$$OP.OQ = OI.OV. \qquad (1)$$

Les deux triangles semblables OHR, OVA donnent

$$\frac{OR}{OV} = \frac{OH}{OA}. \qquad (2)$$

Les deux triangles semblables OHL, OTI donnent

$$\frac{OI}{OL} = \frac{OT}{OH}; \qquad (3)$$

mais comme l'on a

$$OH^2 = OT.OA$$

ou

$$\frac{OH}{OA} = \frac{OT}{OH},$$

les deux seconds membres de (2) et (3) étant égaux, on a

$$\frac{OR}{OV} = \frac{OI}{OL}; \qquad (4)$$

mais dans le triangle HFF′, R et L sont les pieds sur la base F′F de la bissectrice intérieure et de la bissectrice extérieure de l'angle F′HF, et sont par suite conjugués harmoniques par rapport à F et F′; on a donc

$$OR.OL = OF^2;$$

l'égalité (4) donne alors

$$OI.OV = OF^2,$$

c'est-à-dire d'après (1)

$$OP.OQ = OF^2;$$

C. Q. F. D.

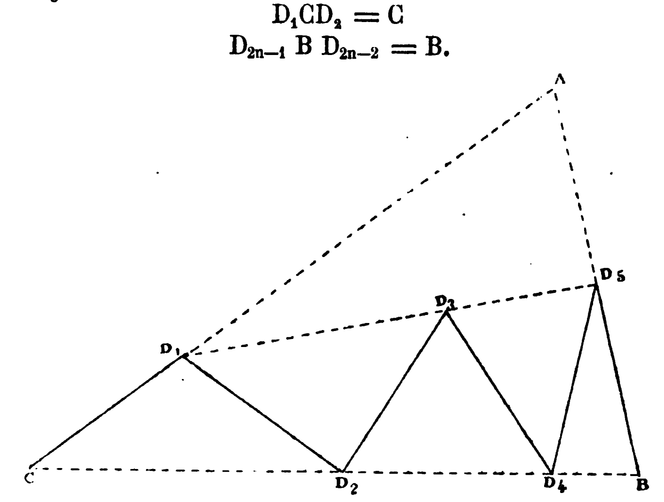
Une démonstration absolument analogue s'appliquerait à l'hyperbole.

XLI

Une chaîne articulée $CD_1D_2 \ldots D_{2n-1}B$ *est formée de* 2n *longueurs égales* $CD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = \ldots = D_{2n-1}B = l$, *elle est étendue sur le sol repliée de façon que les sommets* C, $D_2, D_4 \ldots D_{2n-2}$, B *soient en ligne droite ainsi que les sommets* $D_1, D_3 \ldots D_{2n-1}$.

On sait de plus qu'elle ne revient pas sur elle-même (ce qui implique que les angles D_1CD_2 *et* $D_{2n-1}BD_{2n-2}$ *sont aigus); on demande de calculer la distance* CB = a, *connaissant* l *et les angles*

$$D_1CD_2 = C$$
$$D_{2n-1}BD_{2n-2} = B.$$



Appelons x l'angle $D_3D_1D_2$.

On voit facilement que la chaîne forme 2_{n-1} triangles isoscèles CD_1D_2, $D_1D_2D_3$ ... $D_{2n-2}D_{2n-1}B$, et que les angles au sommet de ces triangles sont en progression arithmétique.
$180 - 2C$, $180 - 2x$, $180 - 4x + 2C$ ...
$180 - 2(2n-2)x + 2(2n-3)C$ et que la raison est : $2C - 2x$.

Mais $D_{2n-1}BD_{2n-2} = B = 90 - \dfrac{BD_{2n-1}D_{2n-2}}{2}$.

On a donc l'équation

$$B = 90 - 90 + 2(n-1)x - (2n-3)C,$$

d'où

$$x = \frac{B + (2n-3)C}{2(n-1)},$$

les angles CD_1D_2, $D_1D_2D_3$ ... $D_{2n-2}D_{2n-1}B$ sont donc

$$(180 - 2C), \left(180 - 2C + \frac{C-B}{n-1}\right), \left(180 - 2C + 2\,\frac{C-B}{n-1}\right)$$
$$\ldots \left[180 - 2C + (2n-2)\,\frac{C-B}{n-1}\right],$$

mais on a

$$CB = 2\Sigma l \cos\left(90 - \frac{D_{2p}\, D_{2p+1}\, D_{2p+2}}{2}\right)$$

ou

$$\frac{a}{2l} = \cos C + \cos\left(C - \frac{C-B}{n-1}\right) + \cos\left(C - 2\frac{C-B}{n-1}\right)$$
$$+ \dots \cos\left(C - (n-1)\frac{C-B}{n-1}\right),$$

et, par la formule qui donne la somme des cosinus d'arcs en progression arithmétique,

$$\frac{a}{2l} = \frac{\sin \frac{n}{2(n-1)}(B-C) \sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{1}{2(n-1)}(B-C)}.$$

Remarque. — Si n est de la forme $2^p + 1$, le problème est résoluble par la règle et le compas; nous engageons les élèves à traiter directement le cas de $p = 0$ et de $p = 1$ et, si nous appelons A le point d'intersection du premier chaînon CD_1 avec le dernier BD_{2n-1}, à construire le triangle ABC connaissant $n = 2$, l la longueur commune des chaînons, $BC = a$ et la somme $AB + AC = K$, en discutant le problème.

XLII

D'un point A *on mène à une parabole de foyer* F *les deux tangentes, en appelant* B *et* C *les points de contact;*

D'un point P *pris sur la droite* CB *je mène les deux tangentes qu'on peut mener de ce point à la parabole.*

L'une coupe AB *en* R *et* AC *en* Q;

L'autre coupe AB *en* R' *et* AC *en* Q'.

Démontrer que l'on a

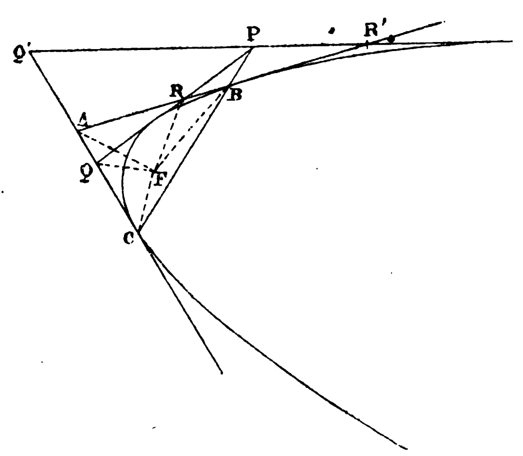
$$\frac{AQ}{AC} = \frac{BR}{BA} \quad et \quad \frac{AQ'}{AC} = \frac{BR'}{BA}.$$

Joignons les points B, R, A, Q, C au point F.

D'après les propriétés connues de la parabole, les deux triangles BFA et FAC sont semblables, ainsi que BFR et FAQ.

Donc dans les deux triangles semblables BFA, FAC, R et Q étant des points homologues, on a

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{BR}{BA}$$



On démontrerait de même que $\frac{AQ'}{AC} = \frac{BR'}{BA}$. C. Q. F. D.

(A suivre.)

QUESTION 100

Solution par Ch. Derigny, élève au Lycée Louis-le-Grand.

(*Suite*, voir p. 178.)

DISCUSSION

Pour qu'une racine convienne au problème, il faut d'abord qu'elle soit réelle; il faut donc que la quantité sous le radical soit positive.

Comme c'est une fraction, il faut que ses deux termes soient de même signe.

Nous pouvons considérer les deux termes comme des

polynômes du premier degré en m; et alors il faudra donner à m des valeurs extérieures aux racines de ces deux polynômes.

La racine du numérateur est $\dfrac{b(a-b)}{(2a-b)^2}$.

Celle du dénominateur est $\dfrac{a-b}{b}$.

Or dans notre problème nous avons supposé $a > b$.

Donc $2a - b > b$.

Par conséquent la racine m' du numérateur est plus petite que celle du dénominateur m''.

Il faut donc, pour que le problème soit possible, que l'on ait

$$m < \frac{b(a-b)}{(2a-b)^2},$$

ou

$$m > \frac{a-b}{b}.$$

Mais pour qu'une racine convienne au problème, il ne suffit pas qu'elle soit réelle; elle peut être positive ou négative; mais elle doit remplir une autre condition, il faut qu'elle soit plus petite que $\frac{b}{2}$, ou plus grande que $a - \frac{b}{2}$, en valeur absolue.

Ainsi

$$x < \frac{b}{2} \quad \text{ou}\, x > a - \frac{b}{2}.$$

Substituons ces deux valeurs dans le premier membre de l'équation (5); avec $\frac{b}{2}$ on aura

$$b^2(b - a + mb) - (b - a)(b^2 - 4mab)mb^3.$$

Effectuons les calculs : $b^2(b-a)$ disparaît, ainsi que mb^3, et il reste

$$+ (b - a) \times 4mab.$$

Comme $b - a$ est négatif, le signe de ce produit ne dépendra que du signe de m.

Dans le problème actuel m ne pouvant être que positif, le produit est négatif.

Le résultat de la substitution est donc toujours négatif; mais le coefficient de x^2 est de signe variable; et il y a plusieurs cas à considérer suivant que $b - a + mb$ est positif ou négatif.

Si $m < \frac{a - b}{b}$, $b - a + mb$ est négatif; et alors le résultat de la substitution étant de même signe que le coefficient du terme en x^2, c'est que $\frac{b}{2}$ est extérieure aux deux racines, et comme il y a une racine négative, $\frac{b}{2}$ est toujours plus grand que les deux racines. La racine positive conviendra certainement. La racine négative également, car elle est égale à la racine positive, mais de signe contraire.

Donc si $m < \frac{a - b}{b}$, deux solutions, une positive et une négative, pourvu toutefois que m soit $< \frac{b(a - b)}{(2a - b)^2}$ d'après la condition de réalité.

Si $m > \frac{a - b}{b}$, le résultat de la substitution est négatif, et par suite de signe contraire au coefficient de x^2 qui est *positif*.

Donc $\frac{b}{2}$ est compris entre les deux racines. La racine plus grande que $\frac{b}{2}$ doit encore être plus grande que $a - \frac{b}{2}$; considérons donc ce que devient le premier membre de l'équation quand on y fait $x = a - \frac{b}{2}$.

On a

$$4\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 (b - a + mb) - (b - a)(b^2 - 4mab) - mb^3.$$

Développons et simplifions, on trouve

$$4a^2b - 4ab^2 + b^3 - 4a^3 + 4a^2b - ab^2 + 4ma^2b - 4mab^2 + mb^3 - b^3 + 4mab^2 + ab^2 - 4ma^2b - mb^3,$$

ce qui devient

$$8a^2b - 4ab^2 - 4a^3,$$

ou

$$4a(2ab - b^2 - a^2) = -4a(a - b)^2.$$

Le résultat de la substitution est toujours négatif, et l'on sait que le coefficient de x^2 est positif; donc $a - \frac{b}{2}$ est compris entre les racines.

Donc la plus grande convient bien au problème, et la plus petite aussi, puisqu'elle est égale à la première et de signe contraire.

En résumé, il y a toujours deux solutions pourvu que m ne soit pas négatif, ni compris entre $\frac{b(a - b)}{(2a - b)^2}$ et $\frac{a - b}{b}$.

Dans le cas où m est négatif, on sait que nous avons un problème différent, et l'équation donne toujours des valeurs réelles, puisque m n'est jamais compris entre m' et m''.

Les racines peuvent être positives ou négatives; mais elles doivent être comprises entre $\frac{b}{2}$ et $a - \frac{b}{2}$ ou $-\frac{b}{2}$ et $-\frac{b}{2} + a$.

Le résultat de la substitution de $\frac{b}{2}$ est positif, et comme m est toujours $< \frac{a - b}{2}$, le coefficient de x^2 est négatif.

Donc $\frac{b}{2}$ est compris entre les deux racines.

Si la racine positive convient, il en sera de même de la racine négative.

Considérons donc la racine positive qui est plus grande que $\frac{b}{2}$, elle doit être plus petite que $a - \frac{b}{2}$.

Le résultat de la substitution de $a - \frac{b}{2}$ est toujours négatif, et par suite de même signe que le coefficient de x^2; donc $a - \frac{b}{2}$ est extérieur aux racines; et comme l'une est négative, il est plus grand que les deux.

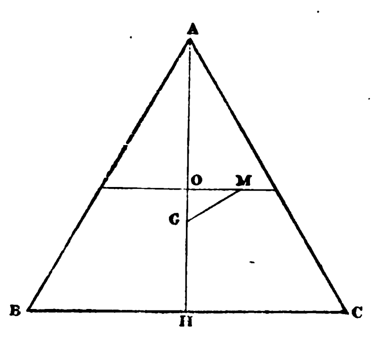
Les deux racines conviennent donc.

Donc

Si $m > m'$, deux solutions en dehors du triangle;

Si $m < m''$, deux solutions : dans le triangle, si m est positif; hors du triangle, si m est négatif.

Pas de solution si m est compris entre m' et m''.



On peut se proposer de calculer la distance du point M au centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Soit G le centre.

Joignons MG; le triangle rectangle MGO nous permet de calculer MG; car

$$\overline{MG}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{OG}^2.$$

Or nous connaissons MO et nous pouvons calculer OG.

$$\overline{OM}^2 = \frac{(b-a)(b^2-4mab)+mb^3}{4(b-a+mb)},$$

$$OG = AG - AO.$$

Or

$$AG = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$AO = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

Donc

$$\overline{OG}^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} - ab + \frac{3b^2}{4},$$

$$\overline{GM}^2 = \frac{(b-a)(b^2-4mab)+mb^3}{4(b-a+mb)} + \frac{4a^2-12ab+9b^2}{12},$$

ce qui devient

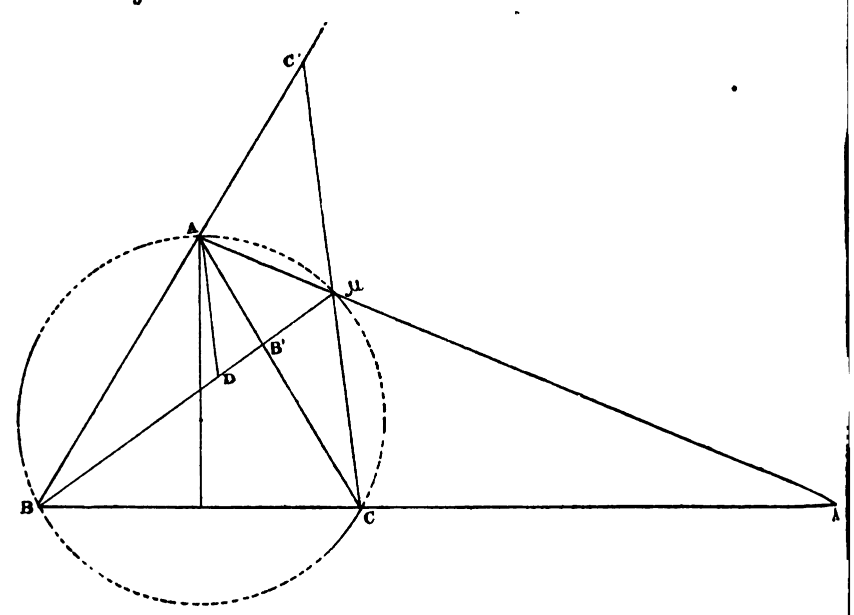
$$\overline{GM}^2 = \frac{3(1-m)b^3 - 6a(1+m)b^2 + 4a^2(1+m)b - a^3}{3(1+m)b - 3a}.$$

Expression qui, on le voit, est indépendante de b, si l'on fait $m = -1$.

Dans ce cas le point M est toujours également distant du point G, quel que soit b. Par conséquent, le point M est sur une circonférence décrite du point G comme centre

avec un rayon égal à $GM = \sqrt{\frac{a^3}{3a}} = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Donc *si le produit* BA′ . CB′ . AC′ *est égal au cube du côté du triangle, le point* M *est sur la circonférence circonscrite au triangle.*



Je dis maintenant que réciproquement, *si l'on prend un point* μ *sur la circonférence circonscrite au triangle* ABC, *et qu'on le joigne aux trois sommets, le produit de trois segments non consécutifs déterminés sur les côtés du triangle est égal à* a^3 :

$$B'A \times C'B \times A'C = a^3$$

ou que

$$\frac{B'A}{a} \times \frac{C'B}{a} \times \frac{A'C}{a} = 1.$$

Menons AD parallèle à C′μ jusqu'à sa rencontre en D avec Bμ; les deux triangles semblales BC′μ et BAD nous donnent

$$\frac{BC'}{a} = \frac{B\mu}{BD}.$$

Mais les deux triangles ABD et AμC sont égaux : car ils ont les côtés AC et AB égaux; l'angle ABμ = l'angle ACμ ; et l'angle BAD = l'angle CAμ, comme ayant même mesure; savoir : l'angle μAC a pour mesure la moitié de l'arc $\mu C = \frac{a - A\mu}{2}$. De même l'angle BAD = BAC — DAC et comme DAC = ACμ, la mesure de l'angle BAD est aussi égale à $\frac{a - A\mu}{2}$. Donc les deux triangles BAD et CAμ sont égaux et l'on a

$$BD = \mu C;$$

remplaçons BD par cette valeur, il vient pour le premier rapport

$$\frac{BC'}{a} = \frac{B\mu}{\mu C}. \qquad (6)$$

Pour le rapport $\frac{CA'}{a}$ les deux triangles semblables A'CA et ACμ nous donnent

$$\frac{CA'}{a} = \frac{\mu C}{\mu A}. \qquad (7)$$

Enfin pour le rapport $\frac{B'A}{a}$ les deux triangles semblables μAB' et μBC nous donnent

$$\frac{AB'}{a} = \frac{\mu A}{\mu B}. \qquad (8)$$

Faisons le produit des trois proportions (6) (7) et (8) :

$$\frac{BC'}{a} \times \frac{CA'}{a} \times \frac{AB'}{a} = \frac{\mu B}{\mu C} \times \frac{\mu C}{\mu A} \times \frac{\mu A}{\mu B} = 1.$$

C. Q. F. D.

VARIÉTÉS

DÉFINITION DES GRANDEURS ET DES NOMBRES

Par M. **A. Calinon**, ancien élève de l'École Polytechnique.

§ 1. — *Notions de la forme et des nombres.*

Lorsque nous comparons entre eux différents corps, nous jugeons que, abstraction faite de la matière qui les compose, ils sont ou ne sont pas de même forme; cette notion de la forme nous vient donc de l'observation du monde matériel; ainsi, nous trouvons à la base de la géométrie, qui est la science de la forme, un fait d'observation, et nous ne voyons pas la possibilité de nous passer de ce fait d'observation pour arriver à l'idée de forme ou de figure.

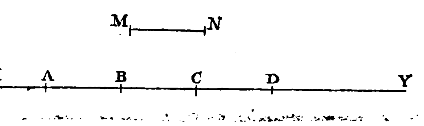
De même l'idée de nombre nous vient de l'observation de plusieurs objets semblables; toutefois il faut remarquer que l'on ne peut déduire de là que la notion des nombres entiers; nous savons ce que c'est que trois, quatre boules, mais un cinquième de boule n'offre aucun sens : pour définir les nombres fractionnaires, on est obligé de recourir à ce qu'on appelle les grandeurs géométriques. Mais, par contre, lorsque l'on parle des grandeurs en géométrie, on les présente comme des figures mesurables et l'on suppose connu le nombre fractionnaire; il y a donc là un certain manque de clarté et de rigueur, et l'on est en droit de se demander si l'idée de nombre se déduit de l'idée de grandeur, ou inversement. C'est ce point que nous allons essayer d'élucider en rattachant simplement la définition du nombre arithmétique ou algébrique à la notion de la forme : de cette façon nous unifierons les sciences mathématiques, en faisant dépendre la géométrie, l'arithmétique et l'algèbre d'un seul fait d'observation, celui qui nous donne la notion de la forme. Ainsi, nous allons considérer l'idée de forme comme étant fournie directement par l'observation, sans définition géo-

métrique, et nous allons en déduire la définition des grandeurs et des nombres.

§ 2. — *Définition des grandeurs.*

Nous rappelons d'abord que des formes ou des figures égales sont celles qu'on peut faire coïncider point par point en les plaçant l'une sur l'autre; on les appelle également des figures superposables; on peut aussi considérer des figures égales comme des positions diverses d'une même figure.

Cela posé, considérons un segment de droite MN et une droite indéfinie XY; portons les deux extrémités M et N du segment MN en A et B sur XY, MN sera situé tout entier sur XY, puisque, d'après la définition de la ligne droite, il n'en passe qu'une par les points A et B : portons à nouveau le segment MN sur XY en BC; l'ensemble des segments AB et BC forme un autre segment AC; de même, si l'on porte encore MN en CD, on a encore un segment AD; donc le segment de droite jouit de cette propriété que des segments égaux, groupés comme nous venons de l'indiquer, donnent toujours des segments.



De même, il résulte de la définition de l'angle plan que des angles égaux groupés sur un même plan, autour d'un sommet commun O, et adjacents les uns aux autres, donnent encore des angles plans.

L'arc de cercle, l'angle dièdre, le fuseau sphérique, etc., jouissent également de cette propriété, c'est-à-dire que des éléments égaux d'une de ces figures peuvent être groupés de façon à reproduire une figure du même genre; cela se démontre pour chaque figure comme conséquence de la définition même de cette figure.

Il va sans dire que cette propriété caractérise seulement quelques figures géométriques; ainsi il n'y a aucun moyen de grouper des cercles égaux de façon à reproduire un cercle.

Nous appellerons, par définition, grandeurs, les figures géométriques qui possèdent ainsi la propriété de reproduire des figures du même genre par un groupement d'éléments égaux, fait d'une certaine façon.

Lorsqu'on part d'une même figure, d'un angle par exemple, deux groupements différents, c'est-à-dire deux groupements donnant des figures non égales, sont des grandeurs de même espèce; en d'autres termes, l'espèce d'une grandeur consiste dans le genre de la figure que l'on considère et dans le mode de groupement par lequel cette figure en engendre d'autres du même genre; telle est la définition du mot *espèce.*

§ 3. — *Définition des nombres entiers.*

Il est évident qu'en partant d'une des figures dont nous venons de parler, par exemple du segment de droite, on peut obtenir, en groupant, comme nous l'avons indiqué, des segments égaux, une infinité de segments différents; pour distinguer entre eux ces divers groupements, nous emploierons le procédé qu'on emploie toujours en pareil cas, lequel consiste à classer et à nommer les objets que l'on considère; nous classerons les groupements dans un ordre tel que chacun résulte du précédent par l'adjonction du segment dont nous sommes partis pour former les groupements : ce classement fait, nous donnerons à chaque figure un nom; de plus, nous adopterons la même série de noms pour la série des groupements d'une quelconque des figures que nous avons appelées grandeurs, segment de droite, arc de cercle, angle plan ou dièdre, etc.

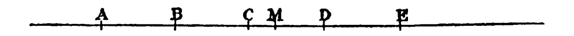
Cette série de noms est, par définition, la série des nombres entiers; lorsqu'on groupe, par exemple, des segments de droite égaux, le segment qui forme l'élément du groupement s'appelle l'unité ou la figure unité, quelle que soit l'espèce de la grandeur; les nombres sont donc les noms des différents groupements d'unités. En résumé, nous arrivons à la définition du nombre en considérant certaines

figures géométriques, appelées grandeurs, qui ont la propriété commune de donner lieu à des groupements spéciaux, et en nous attachant seulement à cette propriété, abstraction faite de l'espèce des grandeurs, c'est-à-dire de ce qui les distingue entre elles.

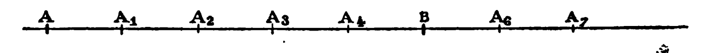
Lorsqu'on se donne la figure unité et le nom d'un des groupements de cette figure, le groupement est évidemment déterminé, puisque ce nom le distingue de tous les autres: c'est ce qu'on exprime en disant que le nombre détermine ou mesure la grandeur en fonction de l'unité.

§ 4. — *Définition des nombres fractionnaires.*

Groupons successivement 2 segments égaux en AC, 3 en AD, 4 en AE, etc.; on voit tout de suite que si le point M tombe entre deux points de division C et D, le segment AM



n'est mesuré ni par le nombre 2 ni par le nombre 3, en fonction de l'unité AB; pour mesurer ou nommer ce segment AM, on est amené à généraliser l'idée du nombre. Considérons à cet effet un segment AB obtenu en groupant 5 segments égaux à AA_1 et supposons que nous prenions AB comme unité; les segments égaux AA_1, A_1A_2, etc., sont appelés



subdivisions ou parties aliquotes de l'unité AB; le segment AA_1 se représente par le symbole 1/5, AB ou l'unité étant un groupement de 5 segments égaux à AA_1; 1/5 est donc le nom ou le nombre qui détermine ou mesure AA_1 en fonction de l'unité.

Groupons maintenant 7 segments égaux à AA_1, et nous aurons ainsi un nouveau segment AA_7 que nous représenterons par le symbole 7/5; ce symbole est ce qu'on appelle le nombre fractionnaire; le dénominateur 5 exprime le nombre des parties aliquotes AA_1 dont le groupement forme l'unité AB et le numérateur 7 exprime le nombre de ces mêmes

parties AA_1 dont le groupement forme le segment AA_7 : ici, comme pour les nombres entiers, chaque fraction 7/5 détermine, mesure un seul segment en fonction de l'unité ; mais la réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que plusieurs fractions peuvent mesurer un même segment en fonction de la même unité.

Le nombre fractionnaire ne permet pas de mesurer absolument toutes les formes du segment; on trouve en effet des segments qui, par rapport à une unité déterminée, ne correspondent à aucun nombre entier ou fractionnaire : c'est le cas de nombres incommensurables qu'on rattache par la méthode des limites au cas précédent; nous n'insistons pas sur ce point qui ne présente aucune difficulté.

Nous allons maintenant définir les quatre opérations de l'arithmétique pour les grandeurs et pour les nombres.

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

164. — Si l, m, n sont les perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur les côtés d'un triangle, démontrer que l'on a

$$4\left(\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}\right)=\frac{abc}{lmn}.$$

165. — ABCP, DEFQ sont deux circonférences concentriques; ABC, DEF sont deux triangles équilatéraux quelconques inscrits dans ces deux circonférences, P et Q un point pris sur chacune de ces circonférences. Démontrer que l'on a

$$QA^2 + QB^2 + QC^2 = PD^2 + PE^2 + PF^2.$$

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 21434-4.

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Ferrent.**

(*Suite*, voir p. 193.)

CHAPITRE III

RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS A TROIS INCONNUES

32. — Soient trois quantités entières a, b, c, et trois autres quantités également entières, a', b', c', que nous appellerons les similaires des précédentes, cette similitude n'existant d'ailleurs que dans la notation. Écrivons, d'après la règle de formation des valeurs des inconnues de deux équations du 1er degré à deux inconnues, les trois binômes

$$ab' - ba', \quad ac' - ca', \quad cb' - bc'.$$

Deux de ces trois binômes ou différences, prises arbitrairement, contiennent, à chacun de leurs termes, une même lettre ou sa similaire. Les deux premières différences ont, en effet, a ou a' à chacun de leurs termes; les deux dernières, c ou c'; et les deux extrêmes, b ou b'.

Théorème. — *Tout nombre qui divise deux de ces trois différences, et qui est premier avec le plus grand commun diviseur entre la lettre commune et sa similaire, divisera aussi la troisième différence.*

En effet, les deux premières différences, qui ont la lettre commune a, étant divisibles chacune, par le nombre N, les deux expressions

$$\left.\begin{array}{l}(ab' - ba')c - (ac' - ca')b \\ (ab' - ba')c' - (ac' - ca')b'\end{array}\right\} \qquad (91)$$

et

seront divisibles par le même nombre. Mais ces deux expressions se réduisent à

$$a(cb' - bc')$$

et

$$a'(cb' - bc'),$$

δ étant le plus grand commun diviseur de a et a', soit

$a = \alpha\delta$, et $a' = \alpha'\delta$. Les deux expressions deviennent

$$\left.\begin{array}{ll} & \alpha\,\delta(cb' - bc') \\ \text{et} & \alpha'\delta(cb' - bc'). \end{array}\right\} \qquad (92)$$

Le nombre N, qui divise ces deux expressions, divise aussi leur plus grand commun diviseur, qui est $\delta(cb' - bc')$, puisque α et α' sont premiers entre eux.

Donc le nombre N, qui est premier avec δ par hypothèse, doit diviser la troisième différence $cb' - bc'$.

Corollaire I. — *Si* a *et* a' *sont premiers entre eux, tout nombre, qui divisera les deux premières différences, divisera aussi la troisième, et le plus grand commun diviseur des deux premières différences sera le plus grand commun diviseur des trois différences.*

Corollaire II. — *Si deux différences sont divisibles par le produit* mn; *si, de plus,* n *divise la troisième différence, tandis que* m *est premier avec le quotient de la troisième différence par* n, *la lettre commune aux termes des deux premières différences et sa similaire seront toutes deux divisibles par* m.

En effet, les expressions (91) et (92) seront divisibles par mn; le plus grand commun diviseur, $\delta(cb' - bc')$, de ces deux expressions sera donc divisible par mn; n divisant, par hypothèse, $cb' - bc'$, m devra diviser l'expression

$$\delta\,\frac{cb' - bc'}{n}$$

et, par suite, m devra diviser δ, puisque m est premier avec le quotient $\dfrac{cb' - bc'}{n}$. Donc m divise a et a'.

Corollaire III. — *Si un nombre, qui divise deux différences, est premier avec la troisième, ce nombre divise le plus grand commun diviseur de la lettre commune aux deux premières différences.*

Il suffit de faire $n = 1$ dans le raisonnement précédent.

33. — Avant de passer à la résolution de deux équations quelconques du premier degré à trois inconnues, arrêtons-nous à l'examen d'un cas particulier.

Supposons d'abord que, dans les deux équations

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz = \mathrm{K} \\ a'x + b'y + c'z = \mathrm{K}' \end{aligned}\right\} \qquad (93)$$

les deux coefficients, a et a', d'une même inconnue, soient premiers entre eux.

Éliminons successivement x et y entre ces deux équations :

$$(ab' - ba')y + (ac' - ca')z = a\mathrm{K}' - \mathrm{K}a', \qquad (94)$$

$$-(ab' - ba')x - (cb' - bc')z = b\mathrm{K}' - \mathrm{K}b'. \qquad (95)$$

Nous allons démontrer que toute valeur, qui satisfera à l'équation (94), satisfera aussi à l'équation (95), et, comme le système (94) et (95) peut remplacer le système (93), cette valeur résoudra aussi ce dernier.

Soit en effet $y = \eta$, $z = \zeta$ une solution entière de (94); on aura

$$(ab' - ba')\eta + (ac' - ca')\zeta = a\mathrm{K}' - \mathrm{K}a'. \qquad (96)$$

Pour trouver la valeur correspondante de x, il suffit de remplacer, dans (95), z par ζ. On obtient ainsi

$$x = \frac{-(cb' - bc')\zeta - (b\mathrm{K}' - \mathrm{K}b')}{ab' - ba'}. \qquad (97)$$

Prenons, dans (96), la valeur de η:

$$\eta = \frac{a\mathrm{K}' - \mathrm{K}a' - (ac' - ca')\zeta}{ab' - ba'}. \qquad (98)$$

Les expressions (97) et (98) peuvent être mises sous la forme

$$x = \frac{-b(\mathrm{K}' - c'\zeta) + b'(\mathrm{K} - c\zeta)}{ab' - ba'}, \qquad (99)$$

$$\eta = \frac{a(\mathrm{K}' - c'\zeta) - a'(\mathrm{K} - c\zeta)}{ab' - ba'}. \qquad (100)$$

Posons $\mathrm{K} - c\zeta = m$ et $\mathrm{K}' - c'\zeta = m'$:

$$x = \frac{mb' - bm'}{ab' - ba'}, \qquad (101)$$

$$\eta = \frac{am' - ma'}{ab' - ba'}, \qquad (102)$$

$ab' - ba'$, $am' - ma'$, $mb' - bm'$ sont les trois différences formées avec les trois lettres a, b, m, et leurs similaires, a', b', m', en suivant la règle de formation des valeurs des inconnues de deux équations à deux inconnues; η est

entier par hypothèse; par conséquent, $ab' - ba'$ divise $am' - ma'$; $ab' - ba'$ divise donc les deux différences $ab' - ba'$ et $am' - ma'$, dont la lettre commune, a, est première avec sa similaire, a'; $ab' - ba'$ divise donc aussi la troisième différence $mb' - bm'$, et x est entier.

Donc, lorsqu'une même inconnue est affectée, dans les deux équations, de coefficients premiers entre eux, pour que la résolution en nombres entiers soit possible, il faut et il suffit que l'équation résultant de l'élimination de cette inconnue puisse être résolue, et toutes les solutions de cette dernière équation satisfont au système proposé.

34. — On peut faire cette démonstration d'une manière plus simple *(Traité élémentaire d'Algèbre de M. J. Bertrand, 1850).*

L'égalité (96) peut être mise sous la forme

$$\frac{b'\eta + c'\zeta - K'}{b\eta + c\zeta - K} = \frac{a'}{a},$$

$\frac{a'}{a}$ est une fraction irréductible, et les deux termes de la fraction du premier membre sont des équimultiples de a' et a.

M étant un nombre entier, on aura donc

$$b'\eta + c'\zeta - K' = Ma'$$

et

$$b\eta + c\zeta - K = Ma,$$

ou

$$a(-M) + b\eta + c\zeta = K$$

et

$$a'(-M) + b'\eta + c'\zeta = K'.$$

Or, ces deux dernières égalités sont les deux équations proposées, dans lesquelles on aurait remplacé les inconnues par les trois nombres entiers M, η et ζ. Les équations proposées sont donc satisfaites par toute valeur, η, ζ, qui satisfait à l'équation résultant de l'élimination de l'inconnue dont les coefficients sont premiers entre eux.

35. — Résolvons maintenant le cas général.

Rappelons le système proposé :

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= K \\ a'x + b'y + c'z &= K' \end{aligned}\right\} \qquad (103)$$

et le résultat de l'élimination successive des trois inconnues :

$$(ab' - ba')y + (ac' - ca')z = aK' - Ka' \quad (104)$$
$$-(ab' - ba')x - (cb' - bc')z = bK' - Kb' \quad (105)$$
$$-(ac' - ca')x + (cb' - bc')y = cK' - Kc'. \quad (106)$$

Les deux équations (104) et (105) peuvent remplacer le système proposé.

Écrivons, pour abréger, ces deux équations sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} by + cz = K \\ ax + c'z = K'. \end{array}\right\} \quad (107)$$

Pour que ce système puisse être résolu, il faut d'abord que chacune des équations (107) puisse être résolue en particulier, c'est-à-dire que le plus grand commun diviseur des coefficients de chacune d'elles divise le terme tout connu.

Supposons que ces premières conditions soient remplies, et que chacune des équations (107) ait été débarrassée de tout diviseur commun; b et c, d'une part, et a et c', d'autre part, seront premiers entre eux.

Chacune de ces équations, résolue au moyen des formules (2), donnera

$$\left.\begin{array}{ll} y = \eta + ct, & x = \xi + c't' \\ z = \zeta - bt, & z = \zeta' - at' \end{array}\right\} \quad (108)$$

η et ζ étant une première solution de la première des équations (107), et ξ et ζ', une première solution de la seconde.

Nous aurons à satisfaire à l'équation

$$\zeta - bt = \zeta' - at'. \quad (109)$$

Pour que cette dernière puisse être résolue, il faut que le plus grand commun diviseur, δ, de a et b, divise $\zeta - \zeta'$.

Or, nous aurons les relations

$$\left.\begin{array}{l} b\eta + c\zeta = K \\ a\xi + c'\zeta' = K'. \end{array}\right\} \quad (110)$$

d'où il résulte :

$$bc'\eta - ac\xi + cc'(\zeta - \zeta') = -(cK' - Kc'). \quad (111)$$

Si δ divise $\zeta - \zeta'$, il divisera le premier membre de (111), et, par suite, il devra diviser $cK' - Kc'$.

Réciproquement si δ divise $cK' - Kc'$, comme il divise les

deux premiers termes de (111), il devra diviser aussi $cc'(\zeta - \zeta')$, et, par suite, $\zeta - \zeta'$, puisqu'il est premier avec c et c'.

Donc, pour que le système des deux équations (107) puisse être résolu en nombres entiers, il suffit que chacune de ces équations puisse être résolue en particulier, et, de plus, que le plus grand commun diviseur de a et b divise l'expression $cK' - Kc'$.

36. — Supposons ces conditions remplies et cherchons les valeurs des inconnues.

L'équation (109) étant résolue au moyen des formules (2), et τ et τ' étant une première solution, on aura :

$$\left.\begin{aligned} t &= \tau + \frac{a}{\delta}\theta \\ t' &= \tau' + \frac{b}{\delta}\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

Portant ces valeurs dans les expressions (108) :

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + c'\left(\tau' + \frac{b}{\delta}\theta\right) \\ y &= \eta + c\left(\tau + \frac{a}{\delta}\theta\right) \\ z &= \zeta - b\left(\tau + \frac{a}{\delta}\theta.\right) \end{aligned}\right\} \qquad (113)$$

En posant $\theta = 0$, nous voyons que les expressions $\xi + c'\tau'$, $\eta + c\tau$, $\zeta - b\tau$ peuvent être considérées comme formant une première solution. Appelons α_1, α_2, α_3 cette première solution. Nous aurons

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 + \frac{bc'}{\delta}\theta \\ y &= \alpha_2 + \frac{ac}{\delta}\theta \\ z &= \alpha_3 + \frac{ab}{\delta}\theta \end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

pour les expressions des inconnues.

Nous voyons que cette méthode nous donne aussi le moyen de composer une première solution du système au moyen

d'une première solution de chacune des équations qui le composent.

37. — Dans le cas où les conditions sont remplies, nous pouvons opérer autrement pour trouver l'expression des inconnues. Soit α_1, α_2, α_3 une première solution du système.

Nous aurons les égalités

$$\left.\begin{aligned} b\alpha_2 + c\alpha_3 &= \mathrm{K} \\ a\alpha_1 + c'\alpha_3 &= \mathrm{K}' \end{aligned}\right\} \qquad (115)$$

en les retranchant de chacune des proposées, il vient

$$\left.\begin{aligned} b(y - \alpha_2) + c(z - \alpha_3) &= 0 \\ a(x - \alpha_1) + c'(z - \alpha_3) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (116)$$

Éliminant z :

$$bc'(a - \alpha_2) = ac(x - \alpha_1). \qquad (117)$$

Puisque b et c. d'une part, a et c', d'autre part, sont premiers entre eux, le plus grand commun diviseur de bc' et ac sera le produit $\gamma\delta$ des plus grands communs diviseurs, savoir, γ, de c et c', et δ, de a et b.

La solution de (117) seront donc, d'après les formules (2):

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 + \frac{bc'}{\gamma\delta}t \\ y &= \alpha_2 + \frac{ac}{\gamma\delta}t \end{aligned}\right\} \qquad (118)$$

Portant ces valeurs dans l'une des équations (116) :

$$z = \alpha_3 - \frac{ab}{\gamma\delta}t \qquad (119)$$

Mais, pour que la valeur de z soit entière, comme γ est premier avec a et b, il faut poser $t = \gamma\theta$, et il vient

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 + \frac{bc'}{\delta}\theta \\ y &= \alpha_2 + \frac{ac}{\delta}\theta \\ z &= \alpha_3 - \frac{ab}{\delta}\theta \end{aligned}\right\} \qquad (120)$$

comme précédemment. *(A suivre.)*

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Emile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 201.)

XLIII

Par un point P *pris sur le prolongement de la base* CB *d'un triangle* ABC, *mener une sécante coupant* AB *en* R *et* AC *en* Q, *et telle que* AR $\times$ CQ *soit minimum.*

C'est la question 34 du Journal; ce qui suit complétera la solution qui en a été donnée dans le numéro de janvier 1883.

Étudions la fonction AR . CQ; supposons P situé sur le prolongement de BC, dans le sens CB.

Lorsque le point Q est situé à l'infini (dans le sens CA) la fonction a une valeur infinie; lorsque le point Q est en Q_1, point où la parallèle à AB menée par P coupe AC, la fonction est encore infinie; pour toute autre position de Q entre Q_1 et le point situé à l'infini dans le sens CA sur CA, cette fonction a une valeur finie et jamais nulle, donc elle aura au moins un minimum dans cet intervalle.

En continuant la discussion, on voit que la fonction décroît si Q varie de Q_1 à A. Si Q est en A elle est nulle, si Q est en C aussi, mais elle reste finie dans l'intervalle, elle a donc au moins un maximum pour une position de Q située entre A et C.

Si Q continue à se mouvoir sur AC en allant de C vers ∞ dans le sens AC, la fonction croît continuellement:

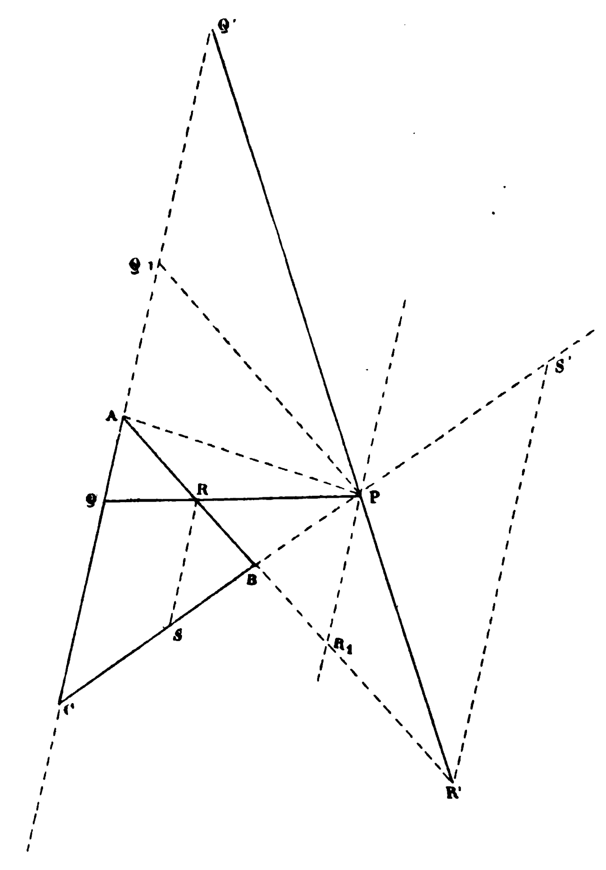
Si P est situé entre B et C, la fonction n'a ni maximum ni minimum.

Discussion analogue si P est sur le prolongement de BC dans le sens CB.

En résumé, P étant placé sur le prolongement de BC dans le sens CB, la fonction que nous étudions a un minimum

pour une position de Q située entre Q_1 et ∞ dans le sens CA et un maximum pour une position de Q située entre C et A.

Posons
$$AR = z$$
$$CQ = y$$
$$CP = l;$$



le théorème des transversales donne
$$(l - a) \, . \, y \, . \, z = l \, . \, (b - y)(c - z)$$
d'où
$$ayz = l(bz + cy - bc)$$
ou
$$z = \frac{lc(y - b)}{ay - lb}.$$

Il faut donc chercher le maximum et le minimum de yz, c'est-à-dire de

$$\frac{lc \,.\, y(y-b)}{ay-lb}.$$

Tous calculs faits, on a la construction suivante:

Prenons sur BC de part et d'autre de P, S et S' tels que PS = PS' soit moyen proportionnel entre PB et PC (S étant pris entre B et C); par S menons une parallèle à AC qui coupe AB en R et par S' une parallèle à AC qui coupe AB en R', la droite PR coupera AC en Q; la droite PR' coupera AC en Q', et AR . CQ correspondra à un maximum, et AR' . CQ' à un minimum. Si le point P est pris entre B et C, la fonction n'a ni maximum ni minimum. S'il est sur le prolongement de BC dans le sens BC la discussion est identique à celle que nous venons de faire.

Remarque I. — On a

$$\frac{AR}{CQ} = \frac{AR'}{CQ'} = \frac{c}{b}.$$

Remarque II. — Si l'on combine ces résultats avec le théorème XLII, on voit que les deux droites PRQ, PR'Q' sont tangentes à la parabole qui est tangente à AC en C et à AB en A. Donc en faisant varier P sur BC cette parabole sera l'enveloppe des droites PRQ, PR'Q' correspondant aux maxima et aux minima.

Remarque III. — Le foyer de cette parabole est sur la droite qui joint le point A au centre des médianes antiparallèles de ABC.

XLIV

Soit un triangle ABC;

sur CA	*et dans le sens*	CA	*je prends*	$CA_c = l$	
— BA	—	BA	—	$BA_b = l$	
— AB	—	AB	—	$AB_a = m$	
— CB	—	CB	—	$CB_c = m$	
— AC	—	AC	—	$AC_a = n$	
— BC	—	BC	—	$BC_b = n$;	

démontrer que les six points $A_c, A_b, B_a, B_c, C_a, C_b$ *ne peuvent appartenir à une même circonférence que si le triangle* ABC *est isoscèle.*

Si les six points appartenaient à une même circonférence, on aurait évidemment

$$l.(b - n) = m.(a - n)$$
$$m.(c - l) = n.(b - l)$$
$$n.(a - m) = l.(c - m).$$

Éliminons n en égalant la valeur de n tirée de la première équation à chacune des valeurs de n tirée des deux autres, on aura:

$$l^2(b - m) + l(m^2 + m(c - a) - b^2) + m(ab - cm) = 0$$
$$l^2(c - m) + l(m^2 + m(b - c) - ab) + m(a^2 - am) = 0.$$

En éliminant l entre ces deux équations, on trouve, après avoir enlevé le facteur commun, $m^2(c - a)^2$ (et écartant ainsi l'hypothèse de $c = a$):

$$[m^2 - m(c + a) + ab]^2$$
$$= [m^2 - m(b + c) + b^2][m^2 - m(2a + c - b) + a^2]$$

Cette équation doit évidemment donner la valeur de m qui correspond au cas où les six points considérés seraient sur une même circonférence.

Mais, tous calculs faits, cette relation se réduit à

$$m(b - c) = 0,$$

c'est-à-dire qu'elle ne peut avoir lieu que si le triangle est isoscèle.

Nous engageons les élèves à s'exercer sur les questions suivantes :

1° *En conservant les notations précédentes et en supposant*

1° *Que* $l = m = n$;

2° *Que les trois droites* A_cA_b, B_aB_c, C_aC_b *se coupent en un même point* O;

Démontrer que l'on a :

$$l^2(2bc + 2ac + 2ab - a^2 - b^2 - c^2) - 10\,abcl^3 +$$
$$4abc(a + b + c)l^2 - 2abc(bc + ac + ab)l + a^2b^2c^2 = 0.$$

Déterminer, avec la règle et le compas, le point O *dans le cas du triangle isoscèle;*

2° *A partir de* A *et dans le sens* AC *je prends* AJ = a
— B — BA — BI = b

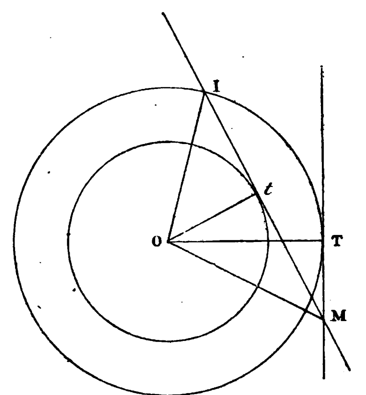
et je construis la parabole tangente à AC *en* J *et à* CB *en* I; *par tout point* K *extérieur à cette parabole je peux mener deux droites* C_aC_b *telles que* $AC_a = BC_b$ *(ce sont précisément les tan-*

gentes à cette parabole menées par K); *par tout point situé sur cette parabole je ne peux mener qu'une seule droite* $C_a C_b$ *(la tangente à cette parabole en ce point); et par tout point intérieur à cette parabole je ne pourrai en mener aucune.*

QUESTION 115

Solution par M. E. Vigarié, élève au Lycée de Toulouse.

On donne deux circonférences ayant pour centre commun le point O. *Soit* OT *un rayon quelconque de la grande circonférence,* Ot *un rayon quelconque de la petite circonférence. Par le point* T *je mène une tangente à la première et par le point* t *une tangente à la deuxième. Soit* M *leur point de rencontre et* I *l'un des points de rencontre de* Mt *avec la grande circonférence. Prouver que l'on a :*



$$Mt^2 = MT^2 + It^2.$$

(X. Antomari.)

Je mène OM et OI. Les triangles rectangles OMt, OMT, OIt donnent :

$$Mt^2 = OM^2 - Ot^2$$
$$MT^2 = OM^2 - OT^2$$
$$IT^2 = OI^2 - Ot^2$$

par suite : $OM^2 - Ot^2 = OM^2 - OT^2 + OI^2 - Ot^2$.

Ou en remarquant que $OT^2 = OI^2$

$$OM^2 - Ot^2 = OM^2 - Ot^2.$$

Nota — La même question a été résolue par M. P. Lamarre, élève du lycée Charlemagne, à Paris, Bordage, à Nantua.

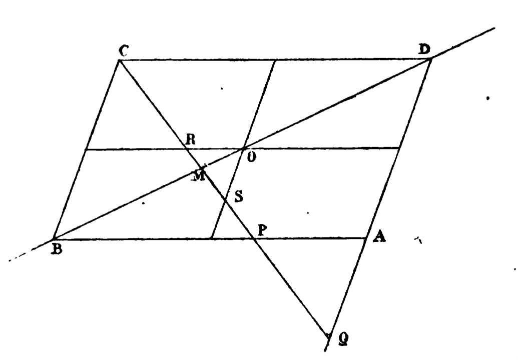
QUESTION 120

Solution par M. Aubry, élève au Lycée de Douai.

On considère un parallélogramme ABCD ; *par le sommet* C *on mène une transversale mobile qui rencontre* AB *en* D *et* AD

en Q. Sur CP et CQ comme diamètre on décrit des cercles. Trouver le lieu géométrique décrit par le centre de similitude de ces deux cercles.

Soient R et S les centres des cercles décrits sur CP et CQ comme diamètres; les points R et S décriront les droites OR, OS homothétiques aux droites AB et AD par rapport au point C, le rapport étant $\frac{1}{2}$.



Le centre de similitude est d'ailleurs un point M situé sur RS et déterminé par l'égalité

$$\frac{MR}{MS} = \frac{CR}{CS}.$$

C'est donc le conjugué harmonique du point C par rapport à RS. Le lieu du point M est donc la polaire du point C par rapport à l'angle ROS, c'est-à-dire la diagonale BD du parallélogramme qui ne passe pas par le point C.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Madiot, institution Sainte-Marie à Besançon; F. Taratte, à Évreux.

VARIÉTÉS

DÉFINITION DES GRANDEURS ET DES NOMBRES

Par M. **A. Calinon**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 212.)

§ 5. — *Addition et soustraction.*

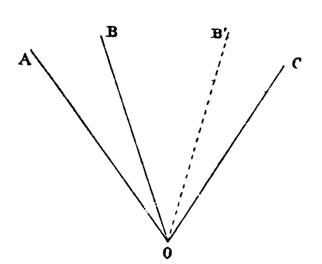
Nous avons vu qu'en groupant d'une certaine façon des segments égaux on obtient encore un segment ; on démontre également qu'en groupant de la même façon des segments

non égaux on obtient aussi un segment; toutes les autres grandeurs jouissent de la même propriété; c'est ce groupement de grandeurs inégales, bien entendu de même espèce, que nous appellerons par définition l'addition; les grandeurs que l'on groupe sont les parties, et leur groupement forme leur somme. La définition de l'addition des nombres se déduit de là; le nombre qui mesure la somme de plusieurs grandeurs de même espèce est la somme des nombres qui mesurent ces diverses grandeurs.

Il résulte de cette définition de l'addition que les groupements de grandeurs égales ne sont que des additions particulières; d'où nous concluons, en passant aux nombres, qu'un nombre entier est la somme de ses unités.

On voit que l'esprit de cette méthode consiste à rechercher ses propriétés communes à toutes les figures appelées grandeurs et à en déduire les propriétés du nombre; dès lors nous n'avons plus qu'à raisonner sur de simples figures géométriques et à constater que le raisonnement est général, quelle que soit l'espèce de la grandeur. Nous allons en citer un exemple.

Soit un angle AOC, somme des deux angles AOB et BOC; on peut faire coïncider l'angle AOC avec lui-même par retournement, c'est-à-dire en portant OC sur OA et OA sur OC; dans ce retournement OB vient en OB′ et l'angle total est alors la somme des angles AOB′ et B′OC, c'est-à-dire des angles BOC et AOB. On peut donc dans une somme de deux angles intervertir l'ordre des parties : on démontre que toutes les figures-grandeurs jouissent de la même propriété : nous en concluons que dans une somme de deux nombres on peut aussi intervertir l'ordre des termes.



On démontre de même par des considérations géométriques que, pour ajouter une somme à une autre, il suffit d'ajouter successivement à cette dernière tous les termes de la première.

La soustraction se définit comme opération inverse de l'addition; elle consiste, étant données la somme de deux grandeurs et l'une d'elle, à trouver l'autre, ou bien, étant donnés la somme de deux nombres et l'un d'eux, à trouver l'autre.

Les signes de l'addition et de la soustraction sont + et —; le signe = placé entre certaines expressions comme

$$4 + 3 = 9 - 2 = 7,$$

signifie que ces expressions mesurent, par rapport à une même unité, des grandeurs égales, c'est-à-dire des figures superposables : ainsi l'égalité arithmétique se déduit de l'égalité géométrique.

§ 6. — *Multiplication et division.*

Multiplier une grandeur donnée par un nombre entier, 4 par exemple, c'est ajouter ou grouper, conformément au mode de groupement spécial à cette grandeur, 4 grandeurs égales à celle qui est donnée; la grandeur donnée est le multiplicande, le nombre 4 est le multiplicateur, la nouvelle grandeur obtenue est le produit.

Si l'on considère la grandeur mesurée par le nombre 4, on voit d'une part que cette grandeur est un groupement de 4 unités, et d'autre part que le produit du multiplicande par 4 est un groupement de 4 multiplicandes; on peut donc dire que le produit est formé avec le multiplicande comme le multiplicateur 4 est formé avec l'unité : en d'autres termes, si, dans la grandeur mesurée par 4, on remplace la figure unité par la figure multiplicande, on obtient le produit de cette dernière par 4.

Cette forme de la définition convient au cas où le multiplicateur est fractionnaire: multiplier une grandeur par 7/5 c'est former avec cette grandeur multiplicande une nouvelle grandeur, comme la grandeur mesurée par 7/5 est elle-même formée avec la grandeur unité.

Ainsi, pour former la grandeur mesurée par 7/5 on prend une grandeur qui, groupée 5 fois, donne l'unité, et l'on groupe 7 de ces grandeurs: de même, pour avoir le produit en question, on prend une grandeur qui, groupée 5 fois, reproduit le multiplicande et l'on groupe 7 de ces grandeurs.

Si le multiplicande est un nombre, l'opération purement arithmétique se déduit immédiatement de l'opération faite sur les grandeurs géométriques, comme pour l'addition. Ainsi, en multipliant par 3 la grandeur mesurée par 2/5 on obtient comme produit une grandeur mesurée par 6/5, ce dernier nombre est appelé, par définition, le produit du nombre 2/5 par le nombre 3.

La division est l'opération inverse de la multiplication et consiste, étant donnés la grandeur-produit et le multiplicateur à trouver la grandeur multiplicande, ou bien, étant donnés le produit de deux nombres et l'un de ces nombres, à trouver l'autre : cette définition ne vise bien entendu que le quotient exact.

On déduit très simplement de là, par des considérations purement géométriques sur les grandeurs, que le quotient de 5 par 7, par exemple, est le nombre fractionnaire 5/7 : nous ne nous étendons pas autrement sur ces diverses démonstrations, notre but étant simplement ici de donner des définitions et d'indiquer l'esprit de notre méthode.

En résumé, cette méthode consiste à considérer en géométrie certaines formes ou figures possédant cette propriété remarquable de reproduire par le groupement de parties égales, des figures du même genre ; de là nous déduisons la définition des nombres ; puis nous définissons les quatre règles sur les figures géométriques et nous en tirons la définition de ces quatre règles sur les nombres. L'arithmétique est ainsi établie sans introduire dans la science un nouveau fait emprunté à l'observation, l'idée de nombre se déduisant de l'idée de forme par voie d'abstracion.

Nous avons à peine besoin d'ajouter que, dans ce qui précède, il convient de considérer les angles comme pouvant dépasser 180° ; autrement les groupements d'angles égaux ne seraient pas en nombre infini ; la même observation s'applique à l'arc de cercle, à l'angle dièdre, etc.

§ 7. — *Quantités négatives.*

La théorie des quantités négatives ne nous paraît pas avoir été présentée jusqu'ici d'une façon bien satisfaisante;

le point capital sur lequel on n'insiste pas assez, c'est qu'en passant de l'arithmétique à l'algèbre l'idée de nombre prend un sens plus général; on est en effet amené à des expressions numériques comme 3 — 5, sans signification arithmétique et que l'on convient, dans un esprit de généralisation, de représenter par le symbole — 2; c'est ce qu'on appelle une quantité négative: ces quantités s'introduisent ainsi à l'aide d'une convention et, plus tard, quand on les rencontre dans la mesure des grandeurs, on les explique à l'aide d'une interprétation ; or il nous semble que cette convention d'abord et cette interprétation ensuite ne valent pas, au point de vue de la clarté et de la rigueur, une définition donnée à priori. De plus, ce n'est pas seulement le symbole — 2 qu'il convient d'expliquer, mais aussi le symbole + 2 qui, arithmétiquement, n'a pas plus de sens que le premier ; en arithmétique, en effet, les signes + et — indiquent des opérations entre plusieurs nombres, mais un nombre seul, précédé de l'un de ces signes, ne veut rien dire.

Nous allons voir que notre méthode nous permet de déduire très simplement la définition des nombres algébriques de la considération des grandeurs. *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Calinon, ancien élève de l'École Polytechnique, à M. de Longchamps.

... Je profite de l'occasion pour vous soumettre, à titre de simple curiosité, une démonstration que je crois nouvelle du théorème de la projection orthogonale d'un cercle suivant une ellipse (*).

Soient P le plan du cercle, Q le plan de projection qui passe par le diamètre AA' du cercle; M est un point quelconque du cercle considéré, m sa projection, $MNm = \varphi$ désigne l'angle plan du dièdre formé par les plans P et Q.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Si D et F sont deux points divisant harmoniquement le diamètre AA′, on sait que le rapport $\frac{MF}{MD}$ est constant, pour tous les points du cercle. Or, on peut toujours choisir le système des points F et D, de telle façon que ce rapport constant soit égal à sin φ (*).

On a alors

$$\frac{MF}{MD} = \sin \varphi. \tag{1}$$

D'autre part, le triangle rectangle MNm donne

$$\frac{Mm}{MN} = \sin \varphi. \tag{2}$$

Les égalités (1) et (2) donnent, par combinaison,

$$\frac{\sqrt{\overline{MF}^2 - \overline{Mm}^2}}{\sqrt{\overline{MD}^2 - \overline{MN}^2}} = \sin \varphi,$$

ou,

$$MF = ND \sin \varphi. \tag{A}$$

En considérant les points F′ et D′, symétriques de F et de D par rapport au centre O du cercle, on trouve de même

$$MF' = ND' \sin \varphi. \tag{A'}$$

Les égalités (A), (A′), en observant que le point N est situé entre les points D et D′, donnent

$$MF + MF' = DD' \sin \varphi. \tag{B}$$

L'équation (B) donne la propriété caractéristique de la somme des rayons vecteurs; les équations (A) et (A′) conduisent, quand on cherche leur interprétation géométrique, à la propriété qui est relative à un foyer et à la directrice correspondante.

Cette démonstration me paraît assez simple et elle offre l'avantage de mettre en évidence, à la fois, les foyers et les directrices.

Note. — On sait comment cette propriété fondamentale de la géométrie élémentaire des coniques *la projection*

(*) Ce point nécessiterait quelques explications; V. la note qui suit la démonstration de M. Calinon.

orthogonale d'un cercle est une ellipse, est ordinairement démontrée; et cette démonstration, due croyons-nous, à M. Courcelles, et qui est reproduite dans la plupart des traités de géométrie élémentaire, bien que très élégante, ne nous paraît ni aussi simple, ni aussi féconde que celle que nous a communiquée M. Calinon et que nous venons de faire connaître. Mais nous croyons devoir indiquer ici, en même temps que les légères modifications qui nous semblent devoir être utilement apportées à cette démonstration, en quoi consiste au juste l'avantage que nous lui attribuons.

Les modifications que nous voulons signaler portent sur deux points.

Lorqu'on a un segment AA', il est bien connu qu'il existe deux points F et D qui le partagent harmoniquement et de telle façon que le rapport $\frac{FA}{FA'} = \frac{DA}{DA'}$, ait une valeur déterminée, quelle que soit cette valeur.

Mais, dans le cas présent, les choses ne se passent pas tout à fait ainsi. Le segment considéré étant AA' il faut trouver deux points F, D, partageant AA' harmoniquement et qui, de plus, soient tels que l'on ait

$$\frac{AF}{AD} = \sin \varphi,$$

φ étant un angle donné. On voit la différence que nous avons voulu signaler; mais cette objection ne touche pas à l'exactitude et à la rigueur de la démonstration; il faut seulement compléter celle-ci en montrant l'existence certaine des points F, D, ce qui se fait sans difficulté. On écrira, par exemple,

$$\sin \varphi = \frac{AF}{AD} = \frac{A'F}{A'D} = \frac{A'F - AF}{AA'}.$$

Comme on a, d'autre part,

$$A'F + AF = AA',$$

on pourra calculer A'F et AF et reconnaître que

$$OF = OF' = \sqrt{a^2 - b^2},$$

b désignant la longueur de la projection, sur le plan QOi, du rayon OI du cercle donné, rayon qui est perpendiculaire à AA'.

Une seconde modification porterait, à notre avis, sur la notation trigonométrique qui ne doit pas entrer dans une démonstration aussi fondamentale de la géométrie des coniques. Il suffit de considérer le triangle rectangle OIi, et de poser, conformément à la notation habituelle,

$$OA = OA' = a, \quad Oi = b, \quad Ii = c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ces légères réserves étant faites, nous pouvons dire maintenant pourquoi la démonstration de M. Calinon nous paraît offrir sur celle que nous avons rappelée, et sur les autres démonstrations connues de nous, un avantage bien marqué. Cette supériorité tient à ce que les deux propriétés fondamentales de l'ellipse, celle qui est relative aux deux foyers, et celle qui vise le foyer et la directrice correspondante, se trouvent mises en évidence, du même coup.

La première de ces propriétés est celle qui, en France, sert de base à la géométrie élémentaire de ces courbes qu'on a nommées, assez singulièrement, courbes usuelles. Ailleurs, et notamment en Angleterre, où l'étude géométrique des coniques est très en faveur (*), c'est la seconde propriété qui est prise comme le point de départ de cette étude.

Assurément, on peut, et par des voies diverses, passer de la première propriété à la seconde et vice versâ. Mais cette transition ne se fait pas sans un certain effort et sans des raisonnements relativement assez longs. La démonstration de M. Calinon offre cette bonne fortune de les faire apparaître, l'une et l'autre, simultanément ; de plus, elle est simple, facile à retenir et nous la croyons nouvelle. Pour ces motifs divers, nous estimons qu'elle sera lue avec l'intérêt qu'elle nous paraît mériter et sur lequel nous avons cru utile d'insister. *(G. L.)*

(*) Voyez notamment le livre très intéressant de *Charles Taylor* (*L'ancienne et la moderne géométrie des coniques*; Cambridge; Deighton Bell and Co, 1881).

BACCALAURÉATS

CLERMONT-FERRAND

Baccalauréat ès sciences.

1. — Une sphère est inscrite dans un tétraèdre régulier, tangentiellement aux arêtes. Connaissant l'arête a du tétraèdre, on demande de calculer : 1° le rayon de la sphère; 2° le volume de la sphère en dehors du tétraèdre; 3° le volume du tétraèdre en dehors de la sphère.

2. — Description de la machine magnéto-électrique de Clarke; théorie de la production des courants dans cette machine; expériences que l'on peut faire avec elle.

3. — Un réservoir en verre contient à 0° un poids de 140 grammes de mercure. On le porte à 200°, et on demande le poids du mercure qui en sortira, sachant que le coefficient de dilatation cubique du verre est $\frac{1}{37000}$, et celui du mercure $\frac{1}{5500}$.

Baccalauréat restreint.

Composition de physique commune avec le *Baccalauréat ès sciences*.

Dispositions anatomiques de l'appareil circulatoire chez les vertébrés.

Etamine et pollen.

Baccalauréat ès lettres.

Un ballon plein d'air, de 5 centimètres de diamètre, est muni d'un tube cylindrique de 5 millimètres de diamètre. Dans ce tube est un index qui, à la température de 0°, est à une distance de 10 centimètres de la surface du ballon. On demande de calculer le chemin parcouru par l'index quand la température s'élève à 50 degrés. On admettra que les dimensions de la sphère et du cylindre ne changent pas, et on prendra $\frac{1}{273}$ pour le coefficient de l'air de 0 à 1°.

Baccalauréat spécial.

1re Série. — *Mathématiques.* — 1° Connaissant tg a et tg$b$, calculer tg $(a + b)$.

2° Étant donnés les trois côtés a, b, c d'un triangle, calculer : les médianes, les bissectrices, les hauteurs de ce triangle, ainsi que le rayon du cercle circonscrit.

Sciences. — Circulation de la sève dans la plante. — Bobine de Rumkorff.

Français. — Expliquer cette morale de la fable *Le loup et l'agneau*: « La raison du plus fort est toujours la meilleure. » Donner des exemples.

2me Série. — *Mathématiques.* — 1° La somme de deux nombres est constante ; quand le produit est-il maximum; et variations de ce produit.

2° Distance d'un point de la ligne de terre à un plan ; différents cas.

Sciences. — L'œil et l'eau.

Français. — Qualités essentielles du genre épistolaire.

3me Série. — *Mathématiques.* — 1° Trouver l'intersection de deux plans parallèles à la ligne de terre.

2° On donne une demi-circonférence de rayon R et on mène deux tangentes à l'extrémité du diamètre; on mène une troisième tangente CD. On connaît l'angle d'inclinaison α que fait cette tangente avec AB. Calculer le volume des triangles AMB, AMC et BMD et l'expression de la surface des deux zones, le tout tournant autour de AB.

Sciences. — L'air, l'oreille, sa constitution et mécanisme de l'audition.

Français. — Utilité des colonies.

4me Série. — *Mathématiques.* — 1° Calculer le volume du tronc de pyramide;

2° Un corps de poids P est en équilibre sur un plan; il est soumis à deux forces dont l'une est parallèle au plan. On demande l'angle α du plan.

Sciences. — Téléphone et microphone.

Littérature. — Les ouvriers d'une usine demandent une

augmentation de salaire; on leur refuse. Une grève se déclare. Rassemblements tumultueux: hommes, femmes et enfants. Discours animés des différents groupes. — Un industriel respecté et aimé de tous cherche à calmer les esprits et à ramener les ouvriers à l'usine. Effet de ses paroles.

5me Série. — *Mathématiques.* — 1° Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs et qui est premier avec l'un d'eux, divise l'autre.

2° Résoudre l'inégalité

$$\frac{(x+a)(x+c)}{(x+b)(x+d)} > 0$$

en supposant $a > b > c > d$.

Sciences. — 1° Chaleur latente de volatilisation de l'eau à 100° et à des températures supérieures.

2° Organisation générale de la fleur, pollen, ovaire, fécondation.

Littérature. — Quelle tragédie de Corneille préférez-vous et quelles raisons donnez-vous de votre préférence?

BORDEAUX

Baccalauréat spécial. — *Mathématiques.* — 1° Démontrer, dans la parabole, que la sous-normale est constante.

2° Trouver et calculer le volume engendré par un triangle isoscèle ABC, tournant autour de sa base AB, sachant que $AB = 48^m,64$ et que l'angle $CAD = 48°14'$.

3° Expliquer les opérations que vous êtes obligé de faire pour résoudre l'équation

$$\frac{x}{7} + \frac{21}{x+5} = \frac{23}{7}.$$

Sciences. — 1° Machine pneumatique à un seul corps de pompe. Le récipient ayant une capacité de 1 litre et le corps de pompe une capacité de 200^{cmc}; quelle sera la force élastique de l'air du récipient après quatre coups de piston.

2° Éthylène. — Propriétés et préparation.

3° Quelles sont les actions et les modifications que subissent les aliments dans le canal digestif?

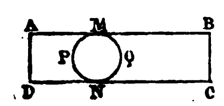
Dissertation. — « La curiosité des enfants est un penchant de la nature qui va comme au-devant de l'instruction, ne manquez pas d'en profiter. »

Suivent quelques exemples pris dans ce que les enfants voient, soit à la ville, soit à la campagne.

Ces paroles de Fénelon sont-elles justes? cet enseignement par les yeux qu'il recommande n'est-il pas utile surtout pour les carrières de l'industrie et du commerce; quel profit en retirent les élèves? Citer des exemples.

MONTPELLIER

Baccalauréat spécial. — *Mathématiques.* — 1° Dans un rectangle déterminé par sa base et sa hauteur, inscrire un cercle de manière que sa surface soit moyenne proportionnelle aux deux parties MQNCB et MPNDA. Discuter.



2° $\cos x \cos 3x = m$; discuter dans le cas de $m > 0$.

Sciences. — Analyse spectrale. — Ses applications pratiques.

On fait passer sur de l'oxyde de cuivre incandescent un mélange d'hydrogène protocarboné et d'hydrogène bicarboné qui a donné par sa combustion complète 1 gramme d'eau et 1 gr. 997 d'acide carbonique; calculer: 1° la composition du mélange gazeux; 2° son volume à 0° et à la pression $0^m,760$, sachant que la densité de l'hydrogène est de 0,0692, celle de l'acide carbonique 1,257.

Français. — Discours de d'Alembert à l'Académie française (1778), lorsqu'il offrit à cette assemblée le buste de Molière sculpté par le célèbre Houdon.

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER, — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 24074-4.

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

Par M. **Ferrent.**

(*Suite*, voir p. 217.)

38. — Reprenons maintenant les deux équations complètes (103), ou plutôt les équations (104) et (105), qui forment un système équivalent.

Ces deux dernières équations sont de la même forme que les équations (107), et nous n'avons qu'à leur appliquer les conditions de résolution énoncées plus haut (n° 35), ainsi que les formules (114).

Toutefois, chacune des équations (107) ayant été supposée débarrassée de tout facteur commun aux quantités connues, nous devrons d'abord diviser chacune des équations (104) et (105) par le plus grand commun diviseur de ses coefficients. D étant le plus grand commun diviseur de $ab' - ba'$ et $ac' - ca'$; D′, celui de $ab' - ba'$ et $cb' - bc'$, ces conditions seront donc :

1° Le plus grand commun diviseur D, de $ab' - ba'$ et $ac' - ca'$, doit diviser $aK' - Ka'$;

2° Le plus grand commun diviseur D′, de $ab' - ba'$ et $cb' - bc'$, doit diviser $bK' - Kb'$;

3° Le plus grand commun diviseur de $\frac{ab' - ba'}{D}$ et $\frac{ab' - ba'}{D'}$ doit diviser l'expression

$$\frac{(ac' - ca')(bK' - Kb') + (aK' - Ka')(cb' - bc')}{DD'},$$

ou

$$\frac{(ab' - ba')(cK' - Kc')}{DD'};$$

ou bien, le plus grand commun diviseur de $(ab' - ba')D$ et $(ab' - ba')D'$ doit diviser $(ab' - ba')(cK' - Kc')$; ou bien, le plus grand commun diviseur ρ de D et D′, c'est-à-dire des trois différences $ab' - ba'$, $ac' - ca'$, $cb' - bc'$, doit diviser $cK' - Kc'$.

39. — Ces conditions peuvent être énoncées plus simplement.

Les deux premières conditions expriment que chacune des équations (104) et (105) peut être résolue en particulier.

Lorsque le problème est possible, l'équation (106) peut évidemment être résolue aussi.

Or, cette nouvelle condition, qui est indispensable, peut remplacer la troisième condition énoncée au numéro précédent. En effet, puisque le plus grand commun diviseur, ρ, de D et D′, divise $ac' - ca'$ et $cb' - bc'$, il divisera aussi le plus grand commun diviseur D″ de ces deux différences, et, si D″ divise $cK' - Kc'$, ρ le divisera aussi.

Nous pouvons donc énoncer les trois conditions comme il suit :

La condition nécessaire et suffisante, pour que le système de deux équations à trois inconnues puisse être résolu en nombres entiers, est que chacune des trois équations résultant de l'élimination successive des trois inconnues puisse être résolue en particulier en nombres entiers.

40. — Ces conditions comprennent le cas où les deux équations données sont incompatibles.

En effet, dans ce cas, nous savons que les trois différences $ab' - ba'$, $ac' - ca'$, $cb' - bc'$ sont nulles, tandis que les différences $aK' - Ka'$, $bK' - Kb'$, $cK' - Kc'$, sont différentes de zéro ; les plus grands communs diviseurs des coefficients des premiers membres des équations (104), (105), (106), sont donc égaux à l'infini ; ils ne divisent pas les seconds membres, qui ne sont pas nuls, et les conditions ne sont pas remplies.

Lorsque les deux équations proposées sont la conséquence l'une de l'autre, les six différences sont nulles, et la condition peut être considérée comme remplie.

Pour qu'un pareil système puisse être résolu, il suffit alors que l'une des deux équations puisse être résolue.

Ce fait sera visible *à priori*, et on n'aura jamais besoin, dans ce cas, de recourir aux équations (104), (105), (106), qui, du reste, n'existent pas.

41. — Nous savons que, si les trois coefficients a, b, c, sont divisibles par un même nombre qui ne divise pas K, les équations ne peuvent être résolues. Nous allons faire voir que cette condition est comprise implicitement dans les trois conditions que nous avons énoncées plus haut.

Reportons-nous aux trois équations (104), (105), (106), et soit δ un nombre premier qui divise a, b, c, et ne divise pas K ; δ divisera les trois différences qui forment les coefficients de ces trois équations. Si les trois conditions étaient remplies, δ diviserait aussi $aK' - Ka'$, $bK' - Kb'$, $cK' - Kc'$, et comme δ divise a, b, c, il diviserait Ka', Kb', et Kc' et, par conséquent, a', b' et c', puisqu'il est premier avec K.

Il en résulterait que les coefficients des inconnues seraient divisibles par δ^2; et, par conséquent, que les trois expressions $aK' - Ka'$, $bK' - Kb'$ et $cK' = Kc'$ seraient divisibles par δ^2.

Posons

$$a = \alpha\delta, \qquad b = \beta\delta, \qquad c = \gamma\delta$$
$$a' = \alpha'\delta, \qquad b' = \beta'\delta, \qquad c' = \gamma'\delta$$

Les équations peuvent être mises sous la forme

$$(\alpha\beta' - \beta\alpha')y + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')z = \frac{\alpha K' - K\alpha'}{\delta}$$

$$-(\alpha\beta' - \beta\alpha')x - (\gamma\beta' - \beta\gamma')z = \frac{\beta K' - K\beta'}{\delta}$$

$$-(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')x + (\gamma\beta' - \beta\gamma')y = \frac{\gamma K' - K\gamma'}{\delta}$$

δ divisant $\alpha K' - K\alpha'$ et $\beta K' - K\beta'$, et étant premier avec le plus grand commun diviseur de K et K', puisqu'il est premier avec K, diviserait aussi $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ (n° 32). Par une raison semblable, δ diviserait aussi $\alpha\gamma' - \gamma\alpha'$ et $\gamma\beta' - \beta\gamma'$; de sorte que $ab' - ab'$, $ac' - ca'$ et $cb' - bc'$ seraient divisibles par δ^3.

Par suite, $aK' - Ka'$, $bK' - Kb'$, $cK' - Kc'$ seraient divisibles par δ^3, et $\alpha K' - K\alpha'$, $\beta K' - K\beta'$, $\gamma K' - K\gamma'$, seraient divisibles par δ^2.

De même, δ étant premier avec le plus grand commun diviseur de K et K' et $\alpha K' - K\alpha'$, $\beta K' - K\beta'$, et $\gamma K' - K\gamma$

étant divisibles par δ^2, les trois différences $\alpha\beta' - \beta\alpha'$, $\alpha\gamma' - \gamma\alpha'$ et $\gamma\beta' - \beta\gamma'$, seraient divisibles par δ^2, et les trois différences $ab' - ba'$, $ac' - ca'$ et $cb' - bc'$ seraient divisibles par δ^4.

Il en serait de même des trois différences $aK' - Ka'$, $bK' - Kb'$, $cK' - Kc'$.

En continuant à raisonner ainsi, on arriverait à cette conclusion, que chacune des six différences $ab' - ba'$, $ac' - ca'$, $cb' - bc'$, $aK' - Ka'$, $bK' - Kb'$, $cK' - Kc'$, serait divisible par une puissance quelconque de δ, c'est-à-dire un nombre infini.

Or, ceci ne peut arriver que lorsque ces six différences sont nulles, c'est-à-dire, dans le second des cas examinés au numéro précédent.

Il est donc absurde de supposer que, dans un système de deux équations à trois inconnues, un nombre premier qui ne divise pas le terme tout connu K, puisse diviser les trois coefficients a, b, c, lorsque les trois conditions sont satisfaites.

42. — Nous pouvons vérifier aussi que les conditions énoncées au n° 39 se réduisent à la première, lorsque les coefficients a et a' d'une même inconnue x sont premiers entre eux.

En effet, l'équation (104) pouvant être résolue, posons $b = \beta\delta$ et $b' = \beta'\delta$, δ étant le plus grand commun diviseur de b et b'.

Les équations (104) et (105) pourront s'écrire :

$$\delta(a\beta' - \beta a')y + (ac' - ca')z = aK' - Ka',$$
$$-(a\beta' - \beta a')x - (c\beta' - \beta c')z = \beta K' - K\beta'.$$

Le plus grand commun diviseur de $a\beta' - \beta a'$ et $c\beta' - \beta c'$ divisera $ac' - ca'$, et, par conséquent, $aK' - Ka'$.

Divisant $a\beta' - \beta a'$ et $aK' - Ka'$, il divisera aussi $\beta K' - K\beta'$, et la seconde condition sera vérifiée.

Un raisonnement semblable ferait voir que la troisième condition est toujours remplie.

43. — Quant aux valeurs des trois inconnues, nous les déduirons des formules (114), et nous aurons

$$x = \alpha_1 + \frac{(ab' - ba')(cb' - bc')}{DD'\delta}\theta$$
$$y = \alpha_2 + \frac{(ab' - ba')(ac' - ca')}{DD'\delta}\theta$$
$$z = \alpha_3 - \frac{(ab' - ba')^2}{DD'\delta}\theta$$

δ étant le plus grand commun diviseur de $\frac{ab' - ba'}{D}$ et $\frac{ab' - ba'}{D'}$, $DD'\delta$ sera le plus grand commun diviseur de $D(ab' - ba')$ et $D'(ab' - ba')$, et $\frac{DD'\delta}{ab' - ba'}$, celui de D et D', ou des trois différences, $ab' - ba'$, $ac' - ca'$, $cb' - bc'$. Appelant ρ ce plus grand commun diviseur, c'est-à-dire, posant $\frac{DD'\delta}{ab' - ba'}, = \rho$, nos formules deviendront

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 + \frac{cb' - bc'}{\rho}\theta \\ y &= a_2 + \frac{ac' - ca'}{\rho}\theta \\ z &= \alpha_3 - \frac{ab' - ba'}{\rho}\theta \end{aligned}\right\} \qquad (121)$$

44. — La méthode que nous avons employée nous a donné les valeurs des inconnues avec certaines difficultés. Voici une autre méthode qui les donne immédiatement.

Soit le système

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= K \\ a'x + b'y + c'z &= K' \end{aligned}\right\} \qquad (122)$$

pouvant être résolu. Soit $x = \alpha_1, y = \alpha_2, z = \alpha_3$ une première solution, de sorte que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 &= K \\ a'\alpha_1 + b'\alpha_2 + c'\alpha_3 &= K' \end{aligned}\right\} \qquad (123)$$

La soustraction donne, en posant $x - \alpha_1 = X$, $y - \alpha_2 = Y$, $z - \alpha_3 = Z$:

$$\left.\begin{aligned} aX + bY + cZ &= 0 \\ a'X + b'Y + c'Z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (124)$$

Résolvons ce système à la manière de deux équations à deux inconnues, X et Y :

$$X = -\frac{\left(\frac{cb' - bc'}{\rho}\right)}{\left(\frac{ab' - ba'}{\rho}\right)} Z$$

$$Y = -\frac{\left(\frac{ac' - ca'}{\rho}\right)}{\left(\frac{ab' - ba'}{\rho}\right)} Z$$

en divisant chaque terme des deux fractions par le plus grand commun diviseur, ρ, des trois différences $ab' - ba'$, $ac' - ca'$, $cb' - bc'$, ce qui réduit les deux fractions à leur plus petit dénominateur commun.

Toute valeur entière de Z, qui sera divisible par $\frac{ab' - ba'}{\rho}$, satisfera aux conditions de la question, puisque X et Y seront entiers.

Posons donc

$$Z = -\frac{ab' - ba'}{\rho}\theta,$$

d'où nous tirons les valeurs

$$X = \frac{cb' - bc'}{\rho}\theta,$$

$$Y = \frac{ac' - ca'}{\rho}\theta,$$

$$Z = -\frac{ab' - ba'}{\rho}\theta,$$

et enfin

$$x = \alpha_1 + \frac{cb' - bc'}{\rho}\theta,$$

$$y = \alpha_2 + \frac{ac' - ac'}{\rho}\theta,$$

$$z = \alpha_3 - \frac{ab' - ba'}{\rho}\theta,$$

formules identiques à celles trouvées plus haut.

45. — Si l'une des trois différences était nulle, $cb' - bc'$,

par exemple, l'un des coefficients de θ serait nul, et l'une des inconnues, x, aurait une valeur déterminée. Si, cependant, on avait $ab' - ba' = 0$, le procédé du numéro précédent devrait être modifié, et il suffirait de remplacer la lettre Z, dans son rôle, par l'une des deux autres inconnues, X ou Y, et l'on verrait que, comme l'indiquent les formules, Z est déterminé.

Voici un exemple de ce cas particulier.

PROBLÈME. — *Une société de bienfaisance est composée de membres français, anglais et américains. Deux versements ont été opérés par les membres : au premier, les Français ont donné en moyenne 5 francs par tête; les Anglais, 7 francs; les Américains, 8 francs; ce qui a produit une somme de 1,000 francs. Au second, les Français ont versé en moyenne 25 francs; les Anglais, 21 francs, et les Américains, 24 francs; ce qui a produit 4,000 francs.*

On demande le nombre des membres de chaque nationalité.

Les équations sont :

$$5x + 7y + 8z = 1000,$$
$$25x + 21y + 24z = 4000.$$

Le nombre des membres français est déterminé et égal à 100.

Quant aux autres membres, il y a neuf manières de répondre en nombres entiers positifs, savoir :

Anglais	4,	12,	20,	28,	36,	44,	52,	60,	68.
Américains	59,	52,	45,	38,	31,	24,	17,	10.	3.

46. — Si, dans les formules (122), deux des trois différences étaient nulles, la troisième le serait également, ce qui semblerait indiquer que chaque inconnue a une valeur déterminée.

Mais il faut remarquer que, dans ce cas, les équations qui composent le système sont une conséquence l'une de l'autre, ou bien elles sont contradictoires. Dans le premier de ces deux cas, le système se réduit à une seule équation ; dans le second cas, il n'existe aucune solution entière, ni même fractionnaire, et la première solution qu'on a supposé avoir trouvée ne peut exister.

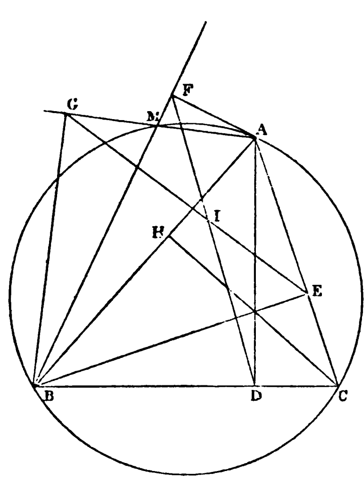
Il n'y a pas lieu de s'étonner des résultats erronés donnés par les formules dans deux cas qui se trouvent en opposition avec les hypothèses que nous avons faites, à savoir, que le système est composé de deux équations distinctes, et qu'il peut être résolu.

Lorsque ce cas se présentera, il sera facile, en remontant aux équations proposées, d'en reconnaître la cause et d'opérer selon la circonstance.

QUESTION 114

Solution, par M. Aubry, du Lycée de Douai.

On donne un triangle ABC *et le cercle circonscrit. Un point mobile* M *parcourt ce cercle. Pour chaque position du point mobile, on construit : 1° la droite de Simson relative au point* A *et au triangle* BCM; *2° la droite de Simson relative au point* B *et au triangle* ACM. *Lieu du point* I *d'intersection de ces deux droites.* (X. A.)



Soient D et F, E et G les pieds des perpendiculaires abaissées des points A sur BC et BM, B sur AC et AM.

Nous avons visiblement

$$\text{GIF} + \text{BFI} = \pi - (\text{AGI} + \text{BMG}).$$

En remarquant que BFI + BAD, AGI = ABE, BMG = C (à cause des quadrilatères inscriptibles BFAD, AGBE, AMBC), la relation précédente deviendra

$$\text{GIF} = \pi - (\text{C} + \text{BAD} + \text{ABE}) = \pi - 2\text{C}.$$

Le lieu du point I est donc le segment de cercle décrit sur DE et capable de l'angle $\pi - 2\text{C}$

Or si nous menons la hauteur CH, nous avons

$$DHE = 2DHC$$

et, puisque le quadrilatère CDHA est inscriptible,

$$DHE = 2DAC = 2\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \pi - 2C.$$

Donc le cercle précédent passe par le point H et le lieu cherché est le cercle des neuf points du triangle ABC.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. F. Taratte, à Évreux; Madiot, à Besançon.

QUESTION 116

Solution par M. TRAPANZALI, élève du troisième gymnase d'Athènes.

Si, dans un triangle, l'angle A *est double de l'angle* B, *on a entre les côtés la relation*

$$a^2 = b(b + c).$$

Cas du triangle rectangle, A *et* B *étant aigus. Réciproque.*

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

En effet, en menant la bissectrice de l'angle BAC on a

$$\frac{c}{BD} = \frac{b}{CD},$$

ce qui donne

$$\frac{c + b}{BD + CD} = \frac{c}{BD} \text{ ou } \frac{c + b}{a} = \frac{c}{BD}; \quad (1)$$

mais puisque les triangles ABC et ABD sont semblables, on a

$$\frac{c}{BD} = \frac{a}{b},$$

et en remplaçant dans (1) $\frac{c}{BD}$ par $\frac{a}{b}$ on a

$$\frac{c + b}{a} = \frac{a}{b},$$

ce qui donne

$$a^2 = b(b + c). \quad (2)$$

REMARQUE. — Si le triangle est rectangle en C, nous aurons $c^2 - b^2 = a^2$, et l'égalité (2) devient alors

$$c^2 - b^2 = b(b + c),$$

d'où

$$c = 2b.$$

Réciproquement. — Si nous avons $a^2 = b(b + c)$ l'angle BAC = 2ABC.

En menant la bissectrice AD de l'angle BAC on a

$$\frac{c}{\mathrm{BD}} = \frac{b}{\mathrm{DC}},$$

d'où

$$\frac{c + b}{a} = \frac{b}{\mathrm{DC}};$$

mais à cause de la relation $a^2 = b(b + c)$, on a

$$\frac{a^2}{b} = b + c,$$

ce qui donne

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\mathrm{DC}};$$

donc les triangles DAC et BAC sont semblables ; d'où

BAC = 2ABC

SOLUTION TRIGONOMÉTRIQUE

Si l'on soustrait les relations suivantes :

$a^2 = c^2 + b^2 = 2cb \cos A$ et $b^2 = a^2 + c^2 - 2ab \cos B$,

on a

$$a^2 = b^2 - cb \cos A + ac \cos B$$

et en remplaçant a par $\frac{b \sin A}{\sin B}$, valeur trouvée de la relation des côtés aux angles opposés, on a

$$a^2 = b^2 - cb \cos A + cb \frac{\sin A \cos B}{\sin B}$$

ou $$a^2 = b^2 + cb \left(\frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\sin B}\right);$$

d'où

$$a^2 = b(b + c).$$

REMARQUE. — Dans le cas où l'angle $c = 90°$, nous aurons

$$a = c \cos B; \qquad (2)$$

mais nous avons

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b} \text{ ou } \frac{2 \sin B \cos B}{\sin B} = \frac{a}{b};$$

d'où

$$\cos B = \frac{a}{2b};$$

remplaçant dans l'égalité (2) cos B par $\frac{a}{2b}$ on a

$$c = 2b.$$

Réciproquement. — Si nous avons $a^2 = b(b + c)$ l'angle $A = 2B$. En effet, les formules

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ et } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

à cause de la relation (1) donnent

$$\cos A = \frac{c^2 - bc}{2bc} = \frac{c - b}{2b};$$

et

$$\cos B = \frac{bc + c^2}{2ac} = \frac{b + c}{2a} = \frac{a}{2b};$$

donc

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2} = \frac{c + b}{4b} = \frac{a^2}{4b^2}$$

et

$$\cos^2 B = \frac{a^2}{4b^2};$$

d'où l'on tire

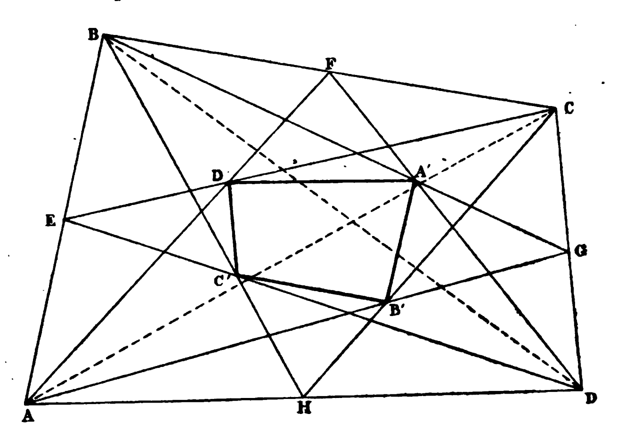
$$B = \frac{A}{2}.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Mazet, à Valence; Lamaire, au lycée Charlemagne à Paris; Vigarié, à Toulouse; Bernheim, à Besançon; Diffimbach, à Condé (Nord); Bordage, à Nantua; Taratte, à Évreux; Bouveret, à Pontarlier; Lomont, Schnarf, institution Sainte-Marie à Besançon; Lecouillard, à Bayeux; Millot, à Chaumont; Beaurepaire, école Massillon à Paris; Richard, à Agen; Aubry, à Douai; Bourgarel, à Antibes.

QUESTION 117

Solution par M. SCHNARF, élève de l'Institution Sainte-Marie, à Besançon.

On donne un quadrilatère ABCD; *soient* A' *le centre de gravité du triangle* BCD, B' *celui du triangle* CAD, *etc. Prouver que les deux quadrilatères* ABCD, A'B'C'D' *sont homothétiques.*



Le centre de gravité d'un triangle est au point de rencontre des médianes, lequel est situé aux deux tiers de leur longueur à partir du sommet.

Par conséquent, dans le triangle DCE on a

$$C'D' \text{ parallèle à } CD \text{ et égale à } \frac{CD}{3}.$$

De même	A'D'	—	AD	—	$\frac{AD}{3}$
	A'B'	—	AB	—	$\frac{AB}{3}$
	B'C'	—	BC	—	$\frac{BC}{3}$

Les deux quadrilatères ABCD, A'B'C'D' ont donc leurs côtés homologues proportionnels; de plus, ils ont les angles égaux

chacun à chacun comme formés par des parallèles dirigées en sens contraire; ils sont donc semblables.

Les côtés homologues de ces quadrilatères étant parallèles, ils sont homothétiques.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Aubry, à Douai; Bourgarel, à Antibes; Millot, à Chaumont; Lamaire, lycée Charlemagne à Paris; Vigarié, à Toulouse.

QUESTION 118

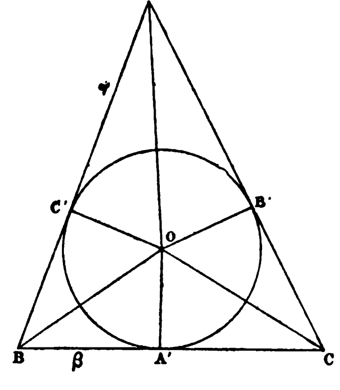
Solution, par M. MAZET, élève au Collège de Valence.

On donne le triangle ABC *et le rayon* r *du cercle. Soit* A′, B′, C′ *les points de contact du cercle inscrit avec les côtés du triangle* A′ *sur* BC, *etc. On pose*

$$AC' = \alpha;$$
$$BH' = \beta;$$
$$CB' = \gamma.$$

S *désignant la surface, prouver que l'on a*

$$S = \frac{\alpha\beta\gamma}{r}.$$



Nous savons que la surface d'un triangle en fonction des côtés est

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad (1)$$

en fonction du rayon

$$S = pr, \qquad (2)$$

p étant le demi-périmètre.

Les tangentes issues d'un même point à une même circonférence étant égales, dans ce cas l'on a

$$p = \alpha + \beta + \gamma.$$

Car

$$a = \gamma + \beta; \qquad b = \alpha + \gamma; \qquad c = \alpha + \beta.$$

La formule (1) devient

$$S = \sqrt{p(\alpha\beta\gamma)};$$

d'où

$$p(\alpha\beta\gamma) = p^2r^2$$

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{r} = pr = S. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Bernheim, à Besançon; Vigarié, à Toulouse; Blessel, à Paris; Schnarf, institution Sainte-Marie à Besançon; Beaurepaire, école Massillon à Paris; Lamaire, lycée Charlemagne à Paris; Bourgarel, à Antibes; Bordage, à Nantua.

QUESTION 122

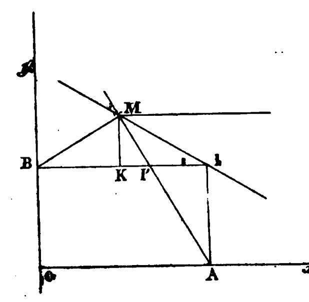
Solution par M. AUBRY, élève au Lycée de Douai.

On donne un angle droit yOx *et un point fixe* M ; *autour du point* M *on fait tourner un angle droit dont les côtés rencontrent* Ox *en* A, Oy *en* B. *Par les points* A *et* B *on mène des parallèles à* Ox *et* Oy ; *ces parallèles se coupent en un point* I. *Démontrer que le lieu du point* I *est une droite.*

2° *La parallèle à* Ox *menée par* B *rencontre* MA *en un point* I′. *Démontrer que le lieu décrit par* I′ *est une parabole ayant pour sommet le point* M *et pour axe une parallèle à* Ox.

(G. L.)

1° Les points O,A,I,M,B sont sur une circonférence dont OI est un diamètre. Donc l'angle OMI est droit et le lieu du point I est la perpendiculaire MI à OM menée par le point M.



2° Si K désigne le point de rencontre de BI′ avec la parallèle MK à Oy menée par le point M, le triangle rectangle BMI′ donnera la relation

$$MK^2 = BK.KI';$$

BK étant constant, ceci fait voir que le point I′ décrit une

parabole ayant le point M pour sommet et pour axe la parallèle à Ox menée par le point M.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. J.-B. Perrin, à Clermont-Ferrand; Blessel, à Paris; Raveau, élève au lycée Charlemagne à Paris; Bourgarel, à Antibes; Taratte, à Evreux; Savonnet, à Salins.

QUESTION 127

Solution par J.-B. PERRIN, maître répétiteur au Petit Lycée de Clermont-Ferrand.

On considère un trapèze ABCD, *dans lequel les diagonales* AC, BD *se coupent orthogonalement au point* P. *Soit pris le point* P′, *symétrique de* P *par rapport à la parallèle équidistante des bases. Démontrer que les cercles* P′AB, P′CD *sont tangents.*

Joignons le point P′ aux quatre sommets du trapèze. Les triangles P′AD, P′CB sont rectangles en P′. En effet, si M et N sont les milieux des côtés non parallèles, on voit que MP = MP′; le triangle DPA étant rectangle en A, la médiane PM est la moitié de DA; donc, P′M étant la moitié de DA, le triangle DP′A est rectangle en P′.

On voit de même que P′N étant la moitié de CB, le triangle CP′B est rectangle en P′.

Soit Q le centre du cercle circonscrit au triangle DCP′; le point Q est l'intersection des perpendiculaires menées de M et de N aux côtés DP′ et CP′; il en résulte que les triangles MQN et AP′B sont homothétiques, le centre d'homothétie étant le point O. On verra de même que le point S étant le centre du cercle circonscrit au triangle AP′B, les deux triangles DCP′, MNS sont homothétiques, le centre d'homothétie étant encore le point O; donc les points Q, P′, S sont en ligne droite; les deux cercles ayant respectivement Q et S pour centres, et passant en P′ sont alors tangents.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Trapanzali, à Athènes; Lespès, à Toulouse; Chapron, à Versailles; Houtebeyrie, à Villeneuve-de-Marsan.

VARIÉTÉS

DÉFINITION DES GRANDEURS ET DES NOMBRES

Par M. A. **Calinon**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 229.)

§ 8. — *Grandeurs algébriques.*

Revenons aux figures dont nous avons parlé : soit un segment de droite AB; on distingue dans ce segment deux sens, suivant qu'on le considère comme décrit par un point allant de A vers B ou de B vers A :

A ——→—— B

dans le premier cas le point A est le point initial et le point B le point terminal : le sens de A à B est indiqué par la flèche *f*; on convient souvent de représenter le sens du segment AB en mettant à la première place dans l'expression AB la lettre du point initial.

De même, l'angle AOB peut être engendré par une droite mobile passant par le sommet, coïncidant d'abord avec le côté OA et venant ensuite coïncider avec le côté OB; si au contraire la droite mobile allait de la position OB à la position OA, on aurait l'angle décrit en sens inverse : ces deux sens sont représentés par les expressions AOB et BOA qui s'expliquent d'elles-mêmes.

A B O

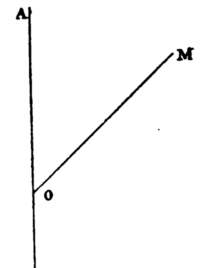
On verrait que toutes les autres figures grandeurs, arcs de cercle, angles dièdres, etc. sont ainsi susceptibles de deux sens : nous appellerons grandeurs algébriques les grandeurs pour lesquelles un sens sera ainsi spécifié : en d'autres termes, ces grandeurs ne diffèrent des précédentes que par l'adjonction de l'idée de sens.

Nous allons voir maintenant l'utilité de cette idée nouvelle.

Sur une droite indéfinie XY prenons un point O fixe : soit un point quelconque M de cette droite; il est évident, que si l'on se donne la longueur OM, la position du point M sur XY n'est pas unique; car cette longueur peut être portée d'un côté comme de l'autre du point O. Mais l'ambiguïté disparaît si on se donne en même temps le sens de OM; ainsi la position de M est bien déterminée quand on se donne la grandeur OM avec son sens, c'est-à-dire la grandeur algébrique de OM.

X O M Y

De même des autres grandeurs; soit par exemple une droite fixe OA dans un plan, la position OM d'une autre droite de ce plan passant par O sera bien déterminée si l'on se donne l'angle AOM avec son sens, c'est-à-dire sa grandeur algébrique : autrement il y aurait pour OM deux positions possibles.

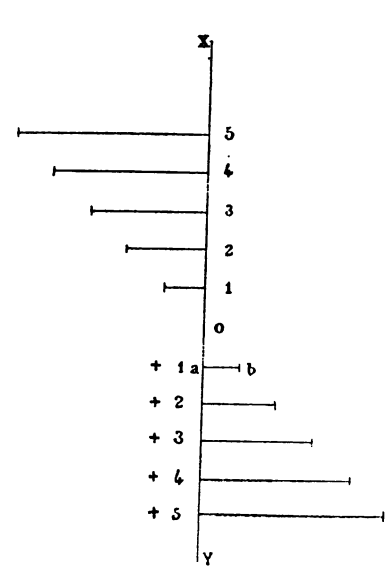


Supposons que, pour une grandeur d'espèce quelconque, on se donne la figure unité avec son sens, on obtiendra, comme pour les grandeurs géométriques, une série indéfinie de groupements composés avec cette unité et ayant le sens de cette unité; ces groupements sont dits positifs; on a aussi la même série de groupements pris avec le sens contraire ou, si l'on veut, composés d'unités changées de sens; ce sont les groupements négatifs : il n'y a pas d'autres groupements possibles, puisque les figures considérées ne sont susceptibles que de deux sens.

§ 9. — *Définition des nombres algébriques.*

Pour passer de là à la définition des nombres algébriques nous suivrons exactement la même marche qu'en arithmétique. Afin de donner plus de clarté à cette exposition prenons, par exemple, des segments de droite; soit *ab* le segment unité, *a* étant le point initial; classons les divers groupements dont nous venons de parler ainsi que l'indique la figure ci-contre, tous les segments étant perpendiculaires à une ligne droite XY sur laquelle nous plaçons le point

initial de chacun de ces segments, les segments positifs étant portés à droite de XY comme l'unité *ab* et les segments négatifs à gauche : nous avons ainsi la série, indéfinie de part et d'autre, de tous les groupements algébriques; les nombres algébriques seront, par définition, les noms de tous ces groupements, abstraction faite de l'espèce de la grandeur. Mais la série totale des groupements peut se décomposer en deux séries, une série de groupements positifs et une série de groupements négatifs, et dans ces deux séries les groupements sont deux à deux égaux et de sens contraire; dès lors il semble tout indiqué d'adopter pour les deux séries la même série de noms qu'en arithmétique en adjoignant aux noms des groupements positifs l'épithète *positif* et aux noms des groupements négatifs l'épithète *négatif*; ainsi, ces noms ou nombres algébriques ne seront pas autre chose que les nombres arithmétiques pris positivement ou négativement.



Il suit de là que le nombre algébrique détermine ou mesure la grandeur en fonction de l'unité, mais il la détermine avec son sens; ainsi, le nombre négatif 3 exprime un groupement de 3 figures égales à la figure unité et de sens contraire.

Nous n'avons parlé jusqu'ici que des nombres algébriques entiers ; on passe de là aux nombres fractionnaires, comme en arithmétique ; il n'y a sur ce point aucune difficulté.

Dans le langage écrit, c'est-à-dire dans le calcul, les nombres se figurent, comme on sait, par des chiffres, et les qualificatifs, *positif* et *négatif*, par les deux signes + et —. Il ne faut, bien entendu, pas voir dans ces deux signes

autre chose que des synonymes aux mots *positif* et *négatif*; nous prenons ainsi ces deux signes dans une acception différente de celle où nous les avons pris tout d'abord; dans les nombres arithmétiques $+$ et $-$ représentent des opérations entre plusieurs nombres; en algèbre, ces signes, placés devant des nombres isolés, représentent le sens des grandeurs que mesurent ces nombres. Nous verrons plus loin ce qui justifie l'adoption des mêmes symboles dans ces deux cas en apparence si différents.

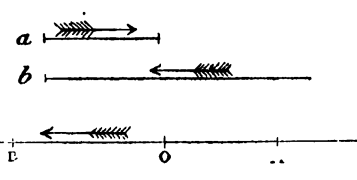
D'après ces définitions la série, illimitée dans les deux sens, des nombres algébriques est

$$\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5 \ldots$$

Il faut de plus intercaler, entre deux termes consécutifs quelconques de cette série, tous les nombres fractionnaires intermédiaires.

§ 10. — *Addition et soustraction algébriques.*

Additionner des grandeurs algébriques, c'est les grouper conformément au mode de groupement spécial à ces grandeurs, mais en tenant compte de leur sens ; telle est la définition de l'addition algébrique tout à fait analogue à la définition de l'addition arithmétique : expliquons cela par un exemple; soient les deux segments de droite a et b dont le sens est indiqué par les flèches; sur une droite indéfinie portons à partir d'un point initial O le segment OA égal à a et de même sens, puis à partir du point A le segment AB égal à b et de même sens : le segment OB ayant le point O pour point initial est, par définition, la somme algébrique des segments a et b : la même définition s'applique au cas de plus de deux segments. Enfin toutes les autres grandeurs algébriques peuvent s'ajouter d'une façon analogue, chacune suivant son mode de groupement.



Si une grandeur est la somme algébrique de plusieurs autres grandeurs partielles, le nombre algébrique qui mesure

la grandeur totale est, par définition, la somme algébrique des nombres qui mesurent les grandeurs partielles.

Ces définitions nous amènent très simplement, et toujours par des considérations géométriques, aux deux conséquences suivantes que nous nous bornons à énoncer.

1° La somme algébrique de plusieurs grandeurs ou de plusieurs nombres est indépendante de l'ordre des termes;

2° Pour ajouter algébriquement deux grandeurs ou deux nombres, on les ajoute arithmétiquement s'ils sont de même sens et on donne à cette somme arithmétique le sens commun des parties; quand ils sont de sens contraires, on retranche arithmétiquement le plus grand du plus petit et on donne au résultat le sens du plus grand.

C'est, nous le répétons, sur des figures géométriques que ces théorèmes doivent se démontrer; on passe des figures aux nombres en constatant que ces théorèmes sont vrais pour toutes les figures grandeurs.

Soient à ajouter les nombres -5 et $+2$, nous aurons d'après la règle précédente une somme égale à -3, ce qu'on exprime ainsi $-5+2=-3$; dès lors on voit qu'il est inutile d'introduire en algèbre un nouveau signe pour figurer l'addition, puisque la règle en question indique pour l'addition algébrique de -5 et de $+2$: 1° l'opération arithmétique à faire, 2° le signe des résultats: ainsi les signes $+$ et $-$ qui en algèbre font en quelque sorte partie des nombres indiquent aussi, dans le cas de l'addition, l'opération à faire entre ces nombres.

Comparons maintenant l'expression arithmétique

$$7-2+3=8$$

et l'expression algébrique

$$+7-2+3=+8.$$

Il résulte de la définition de ces expressions que, dans les deux cas, les opérations arithmétiques à faire sont les mêmes; seulement, dans la seconde expression, l'opération terminée nous donne un signe pour le résultat.

Cette comparaison justifie la définition et l'emploi des signes $+$ et $-$ au point de vue algébrique.

En résumé nous avons, en algèbre, pris les signes $+$ et $-$ dans une acception nouvelle; nous avons montré ensuite que ces signes convenaient pour représenter l'addition algébrique; enfin nous venons de voir que dans un polynôme arithmétique et dans le même polynôme algébrique ces signes indiquent les mêmes opérations; il résulte évidemment de là qu'en algèbre les signes $+$ et $-$ ont uniquement un sens plus général qu'en arithmétique : en arithmétique ils expriment des opérations; en algèbre ils expriment d'abord les mêmes opérations, puis ils en expriment d'autres qui arithmétiquement ne veulent rien dire (par exemple $-5+3=-2$), et enfin ils expriment le sens des grandeurs ou des nombres.

Quant à la soustraction, elle est l'opération inverse de l'addition et elle se définit de la même façon qu'en arithmétique; nous n'insistons pas sur ce point qui ne présente aucune difficulté.

§ 11. — *Multiplication et division algébriques.*

Multiplier une grandeur appelée multiplicande par un nombre algébrique appelé multiplicateur, c'est former avec la grandeur multiplicande une nouvelle grandeur comme le multiplicateur est formé avec l'unité.

C'est, comme on le voit, la même définition qu'en arithmétique : ainsi soit à multiplier une grandeur algébrique par $-\frac{3}{5}$; $-\frac{3}{5}$ est formé avec l'unité en groupant 3 fois le cinquième de l'unité changée de signe; on obtiendra donc la grandeur produit en groupant 3 fois le cinquième du multiplicande changé de signe.

Si au contraire le multiplicateur était positif, le produit aurait le signe du multiplicande : ces deux cas nous donnent la règle connue des signes.

En remplaçant la grandeur multiplicande par le nombre algébrique qui la mesure, on a, comme en arithmétique, la définition de la multiplication d'un nombre par un nombre.

La division se définit comme opération inverse de la mul-

tiplication: elle consiste, étant donnés le produit de deux nombres algébriques et l'un de ces nombres, à trouver l'autre.

En résumé, les quatre opérations algébriques se définissent comme les quatre opérations arithmétiques dont elles ne sont que des généralisations.

De plus, la théorie que nous venons d'exposer rattache bien à la notion expérimentale de la forme les diverses définitions des grandeurs et des nombres arithmétiques et algébriques; c'est précisément ce que nous voulions montrer.

§ 12. — *Définition des inégalités.*

Nous avons déjà employé l'expression *plus grand*; pour ne laisser subsister aucun doute sur le sens des mots nous allons définir cette expression.

Arithmétiquement, un nombre est plus grand qu'un autre lorsqu'il est égal à cet autre ajouté à un nombre quelconque; si l'on a $3 + 5$ égale 8, 8 est plus grand que 3, ce qu'on exprime ainsi $8 > 3$.

Algébriquement, un nombre est plus grand qu'un autre lorsqu'il est égal à cet autre auquel on a ajouté un nombre positif quelconque; si l'on a $-7 + 2 = -5$, -5 est plus grand que -7, puisque -5 est la somme de -7 et d'un nombre positif.

Il ne faut donc jamais perdre de vue les deux sens de l'expression *plus grand* en arithmétique et en algèbre.

La définition de l'expression *plus petit* se déduit de ce qui précède.

Cette distinction entre les deux acceptions du mot *plus grand* est fondamentale, et c'est pour l'avoir perdue de vue que d'Alembert a formulé l'étrange paradoxe que nous allons rappeler. Cet auteur pose la proportion suivante qui est exacte

$$\frac{+1}{-1} = \frac{-1}{+1}$$

et dit: Comment ces deux fractions peuvent-elles être égales quand, dans la première, le numérateur est plus grand que le dénominateur, tandis que l'inverse a lieu dans la seconde?

D'Alembert ne s'aperçoit pas qu'il prend dans cette phrase le mot *plus grand* dans le sens arithmétique et, en effet,

en arithmétique, il est impossible qu'une fraction comme $\frac{2}{3}$, dont le numérateur est plus petit que le dénominateur, soit égale à une fraction comme $\frac{7}{5}$, où le numérateur est plus grand que le dénominateur. Mais dans cette proportion $\frac{+1}{-1} = \frac{-1}{+1}$ les nombres sont algébriques; il ne peut donc être question de l'expression *plus grand* dans le sens arithmétique; dès lors si, dans la phrase de d'Alembert, on rend à l'expression *plus grand* son sens algébrique la phrase perd toute son étrangeté apparente; on s'en rend très bien compte en remplaçant les mots *plus grand* par la définition algébrique donnée plus haut.

(A suivre.)

ECOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

CONCOURS DE 1884. — EXAMENS ÉCRITS

Mathématiques. *(4 heures.)*

Trouver le lieu des foyers des paraboles de grandeur invariable qui touchent une droite donnée en un point donné.

Dictée.

Tempête à l'île Bourbon, de Bernardin de Saint-Pierre.

Trigonométrie. *(1 heure.)*

Deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

Composition française. *(3 heures.)*

Expliquez, appréciez et confirmez par quelques exemples cette pensée de Bacon : « L'homme, créé roi de la nature, exerce sur cette même nature un empire proportionné à la science qu'il en a acquise. »

Dessin. *(4 heures.)*

Machine à agglomérer, double. (Système Couffinhal.)

Physique et Chimie. *(3 heures.)*

1° — Trois pendules sont abandonnés ensemble, en partant du point P. Le premier, long de $4^m,48$, décrit l'arc PA; le deuxième, long de $5^m,67$, décrit l'arc PB situé dans le même plan; le troisième se meut dans un plan perpendiculaire suivant PC. On demande quelle doit être sa longueur pour que les trois mobiles se retrouvent ensemble au point P; après combien d'oscillations et après quel intervalle de temps cette rencontre aura lieu.

2° — Un oxyde de manganèse perd 3,39 o/o de son poids par la calcination à l'air au rouge vif. On demande:

1° La teneur en manganèse;

2° La quantité de Cl qu'un kilogramme dégagera par son action sur HCl;

3° La pression qui sera développée si l'on chauffe à 1400° un kilogramme de cet oxyde enfermé dans une sphère d'acier de $0^m,40$ de diamètre.

3° — 4 gr. 93 d'une poudre blanche soumise à la calcination au rouge blanc donnent un résidu pesant 1 gr. 87. Un autre échantillon de même poids est dissous dans HCl avec effervescence. Le AzH^3 y donne un précipité qui filtré, lavé et calciné pèse 1 gr. 03. Dans la liqueur de lavage le AzH^4O,CO^2 donne un précipité qui calciné au rouge vif pèse 0 gr. 84. La liqueur ne contient plus aucun élément fixe. Un troisième échantillon du même poids traité par HCl étendu de beaucoup d'eau et additionné de BaCl donne un précipité qui, lavé et calciné, pèse 6 gr. 996. On a constaté du reste que la liqueur acide obtenue par la dissolution de cette poudre ne précipite pas par HS et donne un précipité blanc par le AzH S.

On demande la composition probable de cette poudre.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 24074-4.

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES DE 1883

Solution de la question de Mathématiques Élémentaires, par M. L. MARCHIS, élève au Lycée de Rouen.

Trouver la hauteur AB *et les bases* AD, BC *d'un trapèze rectangle* ABCD, *connaissant la longueur* l *du côté oblique* CD, *l'aire* a^2 *du trapèze, et le volume* $\frac{3}{4}\pi b^3$ *engendré par la révolution de la figure autour de* CD.

Discuter les formules trouvées, et déterminer le minimum de b^3. *On examinera les cas particuliers suivants :*

$$l = a, \quad l = 3a.$$

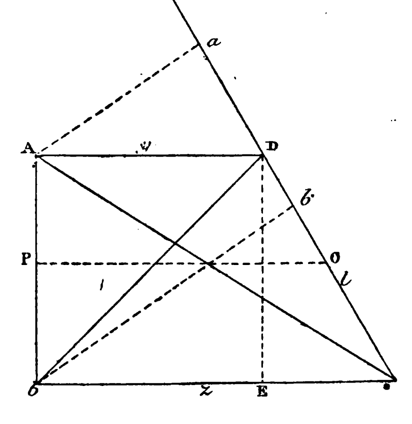
On a :

vol ABCD = vol ADC + vol ABC

Or :

$$\text{vol ABC} = \text{surf AB} \cdot \frac{BC}{3}$$

$$\text{vol ADC} = \text{surf AD} \cdot \frac{AB}{3}$$



Si ab est la projection de AB sur CD, et PO la droite menée par le milieu de AB parallèlement aux bases du trapèze, on a

$$\text{surf AB} = 2\pi \cdot \text{PO} \cdot ab$$

$$\text{surf AD} = \pi \cdot \text{A}a \cdot \text{AD}$$

$$\text{vol ABCD} = 2\pi \cdot \text{PO} \cdot ab \cdot \frac{BC}{3} + \pi \cdot \text{A}a \cdot \text{AD} \cdot \frac{AB}{3}$$

Ceci posé, si x, y, z sont les trois longueurs demandées, les équations du problème seront :

$$\frac{y+z}{2} \cdot x = a^2 \qquad (1)$$

Le triangle rectangle DEC donne :

$$l^2 = x^2 + EC^2 = x^2 + (z - y)^2$$

$$x^2 + (z - y)^2 = l^2 \qquad (2)$$

$$\frac{3}{4}\pi b^3 = 2\pi \cdot \frac{y + z}{2} \cdot ab \cdot \frac{z}{3} + \pi Aa \cdot \frac{yx}{3}$$

Or les deux triangles DEC, AaD sont semblables, car ils sont rectangles, et les angles DCE, aDA sont égaux comme correspondants. On a donc :

$$\frac{Aa}{x} = \frac{y}{l}$$

$$Aa = \frac{xy}{l}$$

D'autre part,

$$ab = AD - bD = aD - bC + l$$

Or les triangles semblables DEC, AaD donnent :

$$\frac{aD}{EC} = \frac{y}{l} = \frac{AD}{z - y}$$

$$\frac{aD}{y} = \frac{z - y}{l}$$

Les triangles rectangles bBC, DEC sont semblables, comme ayant l'angle en C commun.

$$\frac{bC}{EC} = \frac{z}{l} = \frac{bC}{z - y}$$

$$\frac{bC}{z} = \frac{aD}{y} = \frac{z - y}{l} = \frac{bC - aD}{z - y}$$

$$bC - aD = \frac{(z - y)^2}{l}$$

$$ab = -\frac{(z - y)^2}{l} + l$$

donc :

$$\frac{3}{4}\pi b^3 = \pi (y + z) \frac{z}{3} \left\{ l - \frac{(z - y)^2}{l} \right\} + \pi \cdot \frac{xy}{3} \cdot \frac{xy}{l}$$

La 3ᵉ équation du problème est donc :

$$\frac{9}{4} b^3 = (y + z) z \left\{ l - \frac{(z - y)^2}{l} \right\} + \frac{x^2 y^2}{l} \qquad (3)$$

De l'équation (2) on tire :

$$(z - y)^2 = l^2 - x^2$$

et en portant cette valeur dans l'équation (3),

$$\frac{9}{4} b^3 = (y + z) z \cdot \frac{x^2}{l} + \frac{x^2y^2}{l}$$

Mais l'équation (1) donne $y + z = \frac{2a^2}{x}$; et en remplaçant $y + z$ par cette valeur dans l'équation (3), nous pouvons remplacer cette équation par la suivante :

$$x^2y^2 + 2a^2zx - \frac{9}{4} lb^3 = 0 \qquad (3')$$

De l'équation (1) tirons :

$$xy = 2a^2 - xz$$
$$x^2y^2 = 4a^4 - 4a^2xz + x^2z^2$$

l'équation (3') devient :

$$4a^4 - 4a^2xz + x^2z^2 + 2a^2xz = \frac{9}{4} lb^3$$
$$a^4 - 2a^2xz + x^2z^2 = \frac{9}{4} lb^3 - 3a^4$$
$$(a^2 - xz)^2 = \frac{9}{4} lb^3 - 3a^4$$
$$a^2 - xz = \sqrt{\frac{9}{4} lb^3 - 3a^4}$$

en prenant le radical dans toute sa généralité.

L'équation (1) donne

$$xy = a^2 - xz + a^2 = \sqrt{\frac{9}{4} lb^3 - 3a^4} + a^2$$
$$xz = a^2 - \sqrt{\frac{9}{4} lb^3 - 3a^4}$$
$$y = \frac{\sqrt{\frac{9}{4} lb^3 - 3a^4} + a^2}{x} \qquad (4)$$
$$z = \frac{a^2 - \sqrt{\frac{9}{4} lb^3 - 3a^4}}{x} \qquad (5)$$

Portons ces valeurs dans l'équation

$$x^2 + \frac{9lb^3 - 12a^4}{x^2} =$$
$$x^4 - l^2x^2 + 9lb^3 - 12a^4 = 0 \qquad (6)$$

Les inconnues du problème sont donc données par les équations (4), (5), (6).

Discussion. — Pour que les valeurs trouvées pour x, y, z soient une solution du problème, il faut que ces valeurs soient réelles.

1° Condition de réalité de y *et de* z. — Il faut : 1° que x soit réel. Nous examinerons plus bas les conditions qui en résultent.

2°
$$9lb^2 - 12a^4 \geq 0$$
ou
$$b^2 \geq \frac{12a^4}{9l}$$

° *Discussion de l'équation* (6). — Pour que x soit réel, il faut: 1° que la quantité soumise au radical dans la valeur de x^2 (l'équation étant résolue comme équation du deuxième degré en x^2) soit positive, c'est-à-dire que,
$$l^4 - 36lb^2 + 48a^4 \geq 0$$
$$l^4 + 48a^4 \geq 36lb^2$$
$$b^2 \leq \frac{l^4 + 48a^4}{36l}$$

Voyons si cette condition est compatible avec la condition trouvée précédemment, c'est-à-dire si :
$$\frac{l^4 + 48a^4}{6l} > \frac{12a^4}{9l}$$
$$\frac{l^4 + 48a^4}{4} > 12a^4$$
$$l^4 > 0$$

Si nous considérons l'équation (6) comme du second degré eu x^2, si
$$b^2 \geq \frac{12a^4}{9l}$$
le produit des racines de cette équation est positif; donc les deux racines sont de même signe. La somme l^2 des racines est positive, donc les deux racines de l'équation en x^2 sont positives. Si en même temps
$$b^2 \leq \frac{l^4 + 48a^4}{36l}$$

ces deux racines sont réelles ; donc les quatre racines de l'équation bicarrée (6) sont réelles.

Donc pour que x, y, z soient réels, il faut que :

$$\frac{12a^4}{9l} < b^3 < \frac{l^4 + 48a^4}{36l}$$

$\frac{12a^4}{9l}$ est donc le minimum de b^3.

Pour

$$b^3 = \frac{12a^4}{9l} \quad y = \frac{a^2}{x}$$

$$z = \frac{a^2}{x}.$$

$$x = 0, \quad x = +l.$$

Pour $x = 0$

$$y = z = \infty.$$

Dans ce cas, le trapèze ABCD se réduit à l'une ou l'autre de ses bases qui sont des droites indéfinies.

$$x = l, \quad y = z = \frac{a^2}{l}.$$

Le trapèze ABCD devient un *rectangle* dont les deux dimensions sont l et $\frac{a^2}{l}$.

La valeur négative de x ne convient pas au problème.

Remarque. — Quand b^3 devient égal à $\frac{l^4 + 48a^4}{36l}$

$$x = \frac{l\sqrt{2}}{2}, \quad y = \frac{2a^2}{l\sqrt{2}} = z.$$

On a un rectangle dont les dimensions sont :

$$\frac{2a^2}{l\sqrt{2}} \text{ et } \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

Cas particuliers. — 1° $l = a$.

Dans ce cas les limites de b^3 sont.

$$\frac{12a^3}{9}, \text{ minimum}$$

$$\frac{49a^3}{36}, \text{ maximum.}$$

Pour $b^2 = \frac{12a^2}{9}$

$$x = 0, \quad y = z = \infty$$
$$x = a, \quad y = z = a.$$

Le trapèze ABCD devient un *carré*, de côté égal à a.

Pour $b^2 = \frac{49a^2}{36}$

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad y = z = \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}.$$

On a un rectangle dont la base est double de la hauteur.

2° $l = 3a$.

Les limites de b^2 sont :

$$\frac{4a^2}{9}, \text{ minimum,}$$
$$\frac{43a^2}{36}, \text{ maximum.}$$

Pour $b^2 = \frac{4a^2}{9}$

$$x = 0, \quad y = z = \infty$$
$$a = 3a, \quad y = z = \frac{a}{3}.$$

On a un rectangle dont les dimensions sont $3a$ et $\frac{a}{3}$.

Pour $b^2 = \frac{43a^2}{36}$,

$$x = \frac{3a\sqrt{2}}{2}, y = z = \frac{2}{3\sqrt{2}}.$$

Le trapèze est un rectangle.

REMARQUE. — On ne peut admettre que les valeurs positives d'y et de z.

Il faut donc que :

$$a^2 > \frac{1}{2}\sqrt{9lb^2 - 12a^4}$$
$$4a^4 > 9lb^2 - 12a^4$$
$$16a^4 > 9lb^2$$
$$b^2 > \frac{16a^4}{9l}.$$

Si

$$\frac{16a^4}{9l} > \frac{l^4 + 48a^4}{36l}$$

ou

$$l > 2a.$$

Alors

$$\frac{l^4 + 48a^4}{36l}$$

est bien le maximum de b^3. C'est le cas examiné.

Mais si $l > 2a$, $\frac{16a^4}{9l}$ est le maximum de b^3.

QUESTION 125

Solution par M. P. G. Simon, au Collège de Salins.

On donne une circonférence C, *et un point extérieur* A. *De ce point, on mène une corde* AMN, *et on projette* M, N *en* P *et en* Q *sur* CA. *Déterminer l'angle* NAC *de façon que le trapèze* MNQP *soit maximum, et construire géométriquement cet angle.*

Soit H le milieu de MN; HK la perpendiculaire menée du point H sur AC. La surface est égale à PQ $\times$ HK. (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Or on a

$PQ = MN \cos x$;

$HK = CH \cos x = AC \sin x \cos x = d \sin x \cos x$;

$MN = 2\sqrt{R^2 - CH^2} = 2\sqrt{R^2 - d^2 \text{2in}^2 x}$;

d'où

$PQ = 2 \cos x\sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 x}$.

Il en résulte que l'on doit chercher le maximum de l'expression

$$2d \sin x \cos^2 x\sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 x},$$

ou de son carré; or, si nous négligeons le facteur constant $4d^2$, il faut chercher le maximum de l'expression

$$\sin^2 x(1 - \sin^2 x)^2(R^2 - d^2 \sin^2 x).$$

La valeur de $\sin^2 x$ qui satisfera à ces conditions sera racine de l'équation

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2}{1 - \sin^2 x} - \frac{d^2}{R^2 - d^2 \sin^2 x} = 0$$

équation qui devient après réduction,

$$4d^2 \sin^4 x - (2d^2 + 3R^2) \sin^2 x + R^2 = 0.$$

Cette équation a ses racines réelles ; en effet, la quantité sous le radical est

$$4d^2(d^2 - R^2) + 9R^4,$$

quantité essentiellement positive, puisque $d^2 - R^2$ est positive d'après l'hypothèse.

Il faut en outre que l'on trouve pour le sinus une valeur inférieure à l'unité; or, si l'on remplace $\sin^2 x$ par 1, il vient

$$2d^2 - 2R^2,$$

quantité positive; et puisque la demi-somme des racines,

$$\frac{2d^2 + 3R^2}{8d^2}$$

est inférieure à 1. il en résulte que les deux racines sont inférieures à l'unité.

Enfin, si nous menons par le point A une tangente, l'angle qu'elle fait avec AC est déterminé par la valeur

$$\sin\alpha = \frac{R}{d};$$

donc, il faut que la racine soit inférieure à cette valeur de $\sin \alpha$; or la substitution de la valeur précédente donne la quantité négative

$$\frac{R^2}{d^2}(R^2 - d^2).$$

Donc il faudra prendre la plus petite racine pour $\sin^2 x$; on aura donc

$$\sin^2 x = \frac{(2d^2 3R\ )_2 + -\sqrt{4d^2(d^2 - R^2) + 9R^4}}{8d^2}.$$

Pour construire cette valeur, nous remplacerons la quantité inconnue, $\sin x$, par le rapport $\frac{z}{d}$, en appelant z la ligne CH, et nous aurons alors l'équation

$$4z^4 - (2d^2 + 3R^2)z^2 + R^2 d^2 = 0.$$

Nous allons construire deux lignes z' et z'', liées par les relations

$$z'^2 + z''^2 = \frac{2d^2 + 3R^2}{4},$$

$$z'z'' = \frac{Rd}{2};$$

nous prendrons la plus petite de ces deux lignes pour OH.

Le second membre de la première équation représente le carré de la moitié de l'hypoténuse du triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit le côté du carré inscrit dans un cercle de rayon d, et le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon R; la seconde représente la surface d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont R et d; il est alors facile de trouver les côtés z' et z''; avec le plus petit, on décrira du point C comme centre une circonférence; la tangente à cette circonférence menée par le point A est la droite cherchée.

QUESTION 126

Solution par M. E. Vigarié, élève au Lycée de Toulouse.

Étant donnés deux cercles tangents entre eux au point A, *on mène de ce point une transversale qui coupe le premier cercle au point* B, *le second au point* B'. *On joint le point* B *du premier cercle au centre* O' *du second, et le point* B' *du second cercle au point* O *du premier. Les deux droites* BO', B'O *se rencontrent en un point* M *dont on demande le lieu lorsque la transversale* ABB' *prend toutes les positions possibles autour du point* A. — *Discussion. — Signaler les propriétés du triangle* BB'M. — *Étant donné l'angle* θ *que fait la transversale* ABB' *avec la ligne des centres dans une de ses positions, ainsi que les rayons* R *et* R *des deux cercles, trouver les trois côtés du triangle* BB'M *en fonction de ces données.* (Aix, concours académique 1867.)

1° Les cercles O et O' sont tangents extérieurement. Soit M le point d'intersection des droites BO, BO'. Le point de contact A est le centre de similitude inverse des cercles O, O';

les deux rayons homologues OB, OB′ sont donc parallèles et les triangles semblables MOB, MB′O′ donnent

$$\frac{MB'}{MO} = \frac{R'}{R}$$

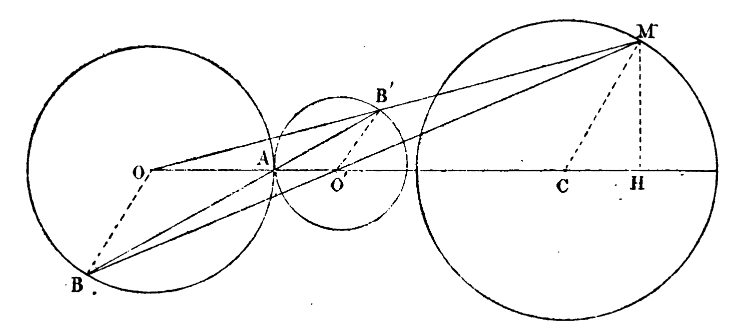
d'où

$$\frac{MO - MB'}{MO} = \frac{R - R'}{R}$$

ou

$$\frac{OB'}{MO} = \frac{R - R'}{R}.$$

Le centre O étant fixe, et le rapport $\frac{OB'}{OM}$ étant constant, le point M décrit une circonférence homothétique à la circonférence O. Pour obtenir le centre de cette circonférence il suffira de mener par le point M une parallèle MC au rayon B′O′ jusqu'à la rencontre de OO′ prolongée.



Si l'on désigne par x le rayon MC on a :

$$\frac{R'}{x} = \frac{OB'}{OM} = \frac{R - R'}{R}$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{RR'}{R - R'}.$$

Il est à remarquer que le point C est le centre de similitude directe des cercles O et O′.

Discussion. — Si $R = R'$, on a $x = \infty$.

Ce qui est évident, puisque alors les droites OB′, BO′ sont parallèles.

Si $R = 2R'$, on a $x = 2R' = R$.

Le cercle C est alors tangent en D au cercle O' ; car O' est le milieu de OC et $OA = x$.

Le triangle BB'M est équivalent au triangle MOO'. Ces triangles sont en effet composés d'une partie commune MO'B', et de triangles BO'B', OO'R équivalents comme ayant même base et hauteurs égales.

La base OO' du triangle MOO' étant constante, sa surface devient maxima avec la hauteur MH, c'est-à-dire pour $MH = x$; la valeur de cette surface est alors

$$\frac{1}{2} OO' \times x = \frac{1}{2} \frac{RR'(R+R')}{R-R'}.$$

Et l'aire du triangle MBB' est

$$\frac{1}{2} \frac{RR'(R+R')}{R-R'}.$$

Calcul des côtés. — On a d'abord

$$BB' = BA + B'A$$

Or

$$BA = 2R \cos \theta$$
$$BA' = 2R' \cos \theta.$$

Donc

$$BB' = 2(R + R') \cos \theta.$$

on a ensuite

$$\frac{BM}{BO'} = \frac{OM}{OB'} = \frac{R}{R-R'}.$$

D'où

$$BM = \frac{R}{R-R'} \times OB'.$$

Évaluons OB'. Le triangle BO'A donne

$$\begin{aligned}\overline{BO'}^2 &= R'^2 + \overline{AB}^2 + 2R' \,.\, AB \cos \theta \\ &= R'^2 + 4R^2 \cos^2 \theta + 4RR' \cos^2 \theta \\ &= R'^2 + 4R(R+R') \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

Par suite

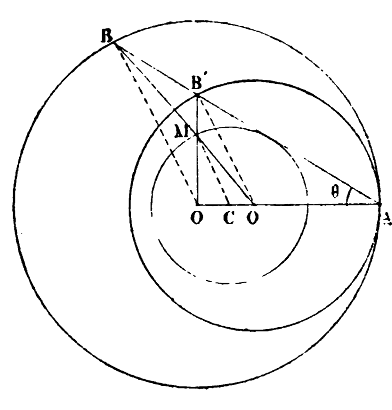
$$BM = \frac{R\sqrt{R'^2 + 4R(R+R')\cos^2\theta}}{R-R'}.$$

On trouverait de même

$$B'M = \frac{R'\sqrt{R^2 + 4R'(R+R')\cos^2\theta}}{R-R'}.$$

2° Les cercles O et O′ sont tangents intérieurement. Soit M un point du lieu. On verra comme plus haut qu'il décrit une circonférence homothétique à la circonférence O′; seulement le rapport d'homothétie est ici

$$\frac{OB'}{OM} = \frac{R + R'}{R}$$



et la valeur du rayon MC est

$$x = \frac{RR'}{R + R'}.$$

Discussion. — Si $R = R'$, on a

$$x = \frac{R'}{2};$$

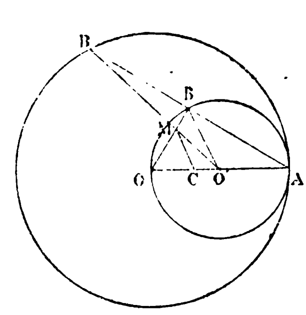
les cercles O et O′ se confondent, le point C vient au point O.

Si $R = 2R'$, on a

$$x = \frac{2}{3} R'.$$

Le cercle C est alors tangent au cercle O′, car comme le montre la figure (3) on a

$$OC = \frac{2}{3} OO' = \frac{2}{3} R' \text{ ou } x.$$



On vérifie facilement que le triangle MBB′ est encore équivalent au triangle MOO′. La surface maximum de ce triangle est

$$\frac{1}{2} \frac{RR'(R - R')}{R + R'}.$$

Calcul des côtés. — On a pour l'un des côtés

$$BB' = BA - B'A = 2(R - R') \cos \theta.$$

D'autre part on a

$$BM = \frac{R}{R + R'} \times BO'.$$

Or

$$\overline{BO'}^2 = \overline{R'}^2 + 4R(R - R') \cos^2 \theta.$$

Donc

$$BM = \frac{R\sqrt{R'^2 + 4R(R - R')\cos^2\theta}}{R + R'}.$$

On aurait de même

$$B'M = \frac{R'\sqrt{R^2 - 4R'(R - R')\cos^2\theta}}{R + R'}.$$

Nota. — La même question a été résolue par M. Bourgarel, à Antibes.

VARIÉTÉS

DEFINITIONS DES GRANDEURS ET DES NOMBRES

Par M. **A. Calinon**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 256.)

§ 13. — *Extension de l'idée de grandeur.*

Les grandeurs dont nous avons parlé jusqu'ici forment une première famille; nous allons maintenant aborder une seconde famille de grandeurs dont le type est la longueur de l'arc de courbe. Remarquons d'abord qu'en général un arc de courbe, un arc d'ellipse par exemple, n'est pas composé d'arcs partiels égaux, c'est-à-dire superposables, ce qui est le caractère distinctif des grandeurs de la première famille. Cependant on exprime, on mesure par un nombre la longueur d'un arc; mais ici il faut une définition.

Soit un arc AB; joignons les points A et B par une ligne polygonale à côtés infiniment petits remplissant les conditions suivantes :

1° Chaque côté en s'évanouissant a pour limite un point de l'arc;

2° Ce côté a pour direction limite la tangente à l'arc en ce point.

Il est évident qu'il y a une infinité de lignes polygonales

satisfaisant à ces conditions ; or, on démontre que les longueurs de ces lignes, c'est-à-dire les longueurs totales de leurs côtés développés en ligne droite, ont toutes même limite, et l'on appelle, par définition, cette limite la longueur de l'arc AB. Dès lors cette longueur d'arc se compare à un segment de droite et est mesuré par un certain nombre : l'arc rectifié est le segment de droite de même longueur.

Les différences entre ces deux familles de grandeurs sont nombreuses. Ainsi dans la première famille deux grandeurs de même espèce mesurées par le même nombre sont des figures égales, superposables : au contraire deux arcs mesurées par le même nombre ne peuvent en général être superposés.

Dire qu'un arc est égal à la somme de deux autres, cela veut dire simplement que le nombre qui mesure le premier est la somme des nombres qui mesurent les deux autres : c'est là la définition de l'addition des arcs; il n'est plus question ici, comme dans la première famille, d'un mode de groupement spécial des arcs partiels reproduisant l'arc total : de même des autres opérations arithmétiques.

En un mot, pour la première famille nous avons défini d'abord les opérations sur les grandeurs pour en déduire les opérations sur les nombres; pour la seconde famille nous suivons la marche inverse.

§ 14. — *Aires et volumes.*

Dans les géométries actuelles on définit l'aire d'un contour fermé la portion de plan contenue dans ce contour, et on passe immédiatement de là à la mesure de l'aire : il est évident que cela ne suffit pas, au point de vue de notre méthode; pour mesurer une aire, il faut d'abord savoir si elle est une grandeur de la première famille, et dans ce cas mettre en évidence la propriété caractéristique du groupement de figures égales, ou une grandeur de la seconde famille, et dans ce cas la définir comme nous avons défini la longueur d'un arc.

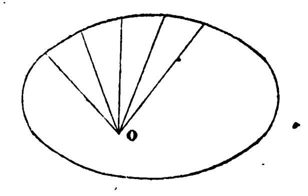
Tout ceci s'applique également aux volumes dont la théorie est traitée d'une façon analogue à celle des aires.

Avant d'exposer la théorie nouvelle, conforme aux principes posés précédemment, voyons exactement sur quelles bases repose la théorie actuelle : un examen un peu attentif nous montre que ces bases sont les principes suivants qui, formulés ou non, sont admis comme des axiomes.

1° Lorsque l'on groupe des contours fermés de façon à ce qu'ils donnent un nouveau contour total, l'aire du contour total est la somme des aires des contours partiels ;

2° Lorsque l'on décompose un contour total en un certain nombre de contours partiels, l'aire totale ou la somme des aires partielles est indépendante de la manière dont la décomposition est faite.

Ces principes sont bien clairs, bien nets et nous ne songeons pas du tout à les contester : mais voici une première objection qui se présente : prenons par exemple une ellipse, et inscrivons dans cet ellipse un polygone à côtés infiniment petits : traçons maintenant le réseau des triangles ayant pour sommet commun un point O pris dans l'ellipse et pour bases respectives les divers côtés du polygone; le périmètre du polygone a pour limite la longueur de la courbe et l'ensemble des triangles a pour limite l'aire de l'ellipse. Or, pour



le premier cas, on a cru devoir démontrer que le périmètre du polygone a une limite constante, quelle que soit la loi de variations de ce polygone et l'on a pris cette limite comme longueur de la courbe, cela par définition; dès lors quelle raison a-t-on de procéder autrement pour l'aire?

Nous ne voyons pas du tout que la notion de l'aire soit plus simple que celle de la longueur du contour : au contraire, la surface est même une grandeur plus complexe, car, en dehors du mode de variation du polygone inscrit, la somme des triangles considérés peut encore varier d'une infinité de façons quand on déplace le point O; cette somme aura-t-elle donc dans tous les cas une même limite ?

Telle est la question qui a été tranchée par une définition précise et une démonstration pour la longueur de l'arc

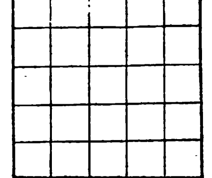
et que tranchent, au contraire, par voie d'axiomes les deux principes que nous avons rappelés ci-dessus à propos des aires.

D'où viennent donc ces deux principes qu'on nous demande d'admettre ? Qu'on parle à une personne étrangère aux mathématiques de la longueur d'un arc et de l'aire d'un contour, et l'on s'aperçoit qu'on est immédiatement compris sans que des définitions soient nécessaires : il n'en résulte pas que ce soient là des idées premières, évidentes, irréductibles et n'admettant pas de définition ; en aucune façon ; ce sont seulement des idées qu'une observation de tous les jours nous a rendues familières bien avant qu'on les aborde en mathématiques ; voilà pourquoi on ne songe pas à les discuter ; mais ici nous n'avons pas à tenir compte de ce que nous donne l'observation du monde matériel : nous faisons des mathématiques, et par conséquent nous n'avons qu'à appliquer la méthode mathématique, faite de définitions et de raisonnements purs ; ce sera d'ailleurs pour nous un contrôle des notions, antérieures aux mathématiques, que nous tenons de l'observation.

Tout ce qui précède s'applique évidemment aux volumes. Nous allons maintenant traiter la question conformément aux principes exposés plus haut.

§ 15. — *Carrés et cubes.*

Divisons chacun des 4 côtés d'un carré en 5 parties égales, par exemple, et joignons les points de division comme nous l'indiquons sur la figure ; d'après les propriétés des parallèles le carré se trouve ainsi formé d'un groupe de carrés partiels égaux entre eux et ces carrés partiels sont au nombre de 5×5 ou 5^2. Réciproquement si l'on prend un nombre de carrés égaux qui soit une seconde puissance, 5^2, on peut les grouper en un nouveau carré.



Donc le carré jouit de la propriété caractéristique des grandeurs de la première famille, puisqu'un groupement spécial de carrés égaux reproduit un carré.

Remarquons d'abord que le mode de groupement spécial à cette nouvelle grandeur est tel que le nombre des carrés groupés doit toujours être une seconde puissance. Ainsi tandis qu'on obtient des segments de droite en groupant 2, 3, 4, 5... segments égaux, on n'obtient des carrés qu'en groupant 2^2, 3^2, 4^2... carrés égaux. De même pour subdiviser le carré-unité en parties égales, il faut que le nombre de ces parties soit une seconde puissance, de sorte que ces subdivisions correspondent aux fractions $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, $\frac{1}{4^2}$, etc.

Enfin si l'on prend une subdivision $\frac{1}{5^2}$ de l'unité et que l'on groupe 7^2 fois cette subdivision, on aura le carré $\frac{7^2}{5^2}$. il résulte de là que les noms de tous les carrés ou les nombres qui les mesurent sont les secondes puissances de tous les nombres entiers ou fractionnaires; de plus tout nombre comme $\frac{7^2}{5^2}$ détermine un seul carré en fonction de l'unité.

En dehors des carrés dont nous venons de parler, on peut en considérer une infinité d'autres mesurés par des nombres qui ne sont pas des secondes puissances: on démontre en effet qu'un nombre quelconque comme $\frac{8}{11}$ est la limite d'une série de nombres fractionnaires qui sont eux-mêmes des secondes puissances. Nous n'insistons pas sur ce cas qui n'offre aucune difficulté. Prenons maintenant pour carré-unité le carré dont le côté est l'unité de longueur; il résulte de ce que nous avons dit relativement au mode de groupement des carrés que les carrés construits sur les côtés 1, 2, 3, 4... correspondent aux nombres 1, 2^2, 3^2, 4^2,...; de même les côtés $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$... nous donnent des carrés mesurés par les nombres $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, $\frac{1}{4^2}$... ; enfin le carré de côté $\frac{7}{5}$ a pour mesure $\frac{7^2}{5^2}$; on en déduit que le nombre qui mesure

un carré, avec le système d'unités indiqué, est le carré du nombre qui mesure son côté ; ce qui s'étend par la méthode ordinaire au cas où le côté est mesuré par un nombre incommensurable.

Nous n'aurions qu'à suivre identiquement la même marche pour le cube.

Pour terminer, signalons encore une différence entre ces deux grandeurs, carré et cube, et les précédentes : nous avons vu que pour le segment de droite, l'angle, etc., le mode de groupement spécial à chacune de ces grandeurs, lorsqu'on l'applique à des parties inégales, donne encore des grandeurs de même espèce ; au contraire, on ne peut pas en général grouper des carrés inégaux comme on groupe des carrés égaux ; de même pour les cubes. Il résulte de là que si l'on avait pris cette propriété du groupement des parties inégales comme définition des grandeurs, cette définition n'aurait pas convenu au carré et au cube.

Une seconde conséquence de cette remarque, c'est que les opérations d'addition, soustraction, etc., ne peuvent s'entendre pour le carré comme pour le segment de droite par exemple ; ainsi la somme de carrés inégaux n'est pas un nouveau carré résultant du groupement des premiers : ajouter deux carrés, c'est en trouver un troisième mesuré par un nombre égal à la somme des nombres qui mesurent les deux premiers.

Ces caractères, spéciaux au carré et au cube, font à ces deux grandeurs une place à part parmi les grandeurs de la première famille.

§ 16. — *Aire d'un contour fermé. Volume.*

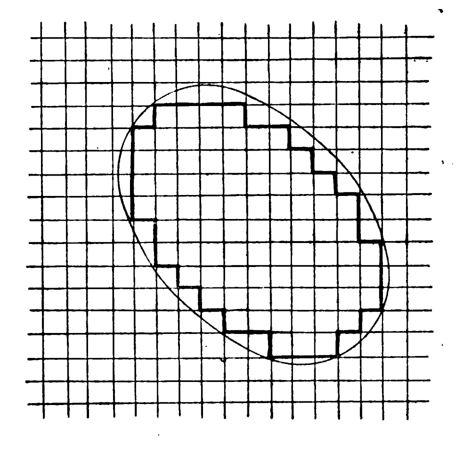
Nous considérerons l'aire d'un contour fermé comme une grandeur de la seconde famille, et nous passerons du carré à l'aire d'un contour quelconque comme on passe du segment de droite à la longueur d'un arc de courbe.

Traçons sur un plan un réseau de carrés égaux adjacents à côtés infiniment petits et plaçons notre contour sur ce réseau ; il y aura dans l'intérieur de ce contour un certain nombre de ces carrés ; cela posé, on démontre le théorème suivant :

Quel que soit le mode de variation du réseau de carrés infiniment petits, quelle que soit l'orientation du contour par rapport aux côtés des carrés, la somme des carrés compris dans ce contour a une limite constante.

Dès lors, nous appelons aire du contour cette limite : telle est la définition de l'aire.

Le volume se déduit du cube par le même procédé.



Arrivé à ce point de notre étude, nous croyons pouvoir conclure ainsi que nous l'avions annoncé au début.

Nous avons admis la notion de la forme comme empruntée à l'observation du monde extérieur : nous avons ensuite écarté toutes les autres notions empruntées à l'observation en définissant, à l'aide de la forme, le nombre arithmétique, le nombre algébrique, puis les aires et les volumes.

Il ne reste donc plus en géométrie, en arithmétique et en algébrique que la seule notion de la forme tirée de l'observation. Ce fait d'observation unique suffit pour établir ces trois sciences par la méthode purement mathématique.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PARIS

— Soient a', b', c', les médianes d'un triangle rectangle quelconque, on demande de trouver, entre ces trois quantités, une relation qui ait lieu quel que soit le triangle rectangle considéré.

— Calculer le rayon d'un cercle, sachant que la différence entre l'aire de l'octogone régulier inscrit et l'aire de l'hexagone régulier inscrit est égale à 1^{m^2}.

— Trouver les valeurs de l'angle x qui satisfont à l'équation

$$\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{cotg}\, x = 8 \cos^2 x.$$

— Trouver les valeurs de x entre o et 2π qui satisfont à l'équation

$$\sin 2x = \cos 3x.$$

— Lieu géométrique de tous les points de l'espace à égale distance de deux droites qui se coupent.

— Quelle condition doivent remplir les coefficients a, b, c, pour que la fraction

$$\frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a}$$

puisse prendre toutes les valeurs, positives ou négatives.

— Trouver les limites entre lesquelles h doit être compris, pour que l'inégalité

$$x^2 + 2hx + h > \frac{3}{16}$$

soit vérifiée pour toutes les valeurs réelles de x.

— On considère l'expression $a \cos 2\theta + b \sin 2\theta$; on demande de la calculer, sachant que $\mathrm{tg}\, \theta = \frac{b}{a}$.

— Étant donnés dans l'espace deux points A et B, on demande de trouver le lieu géométrique du point M, tel que le rapport $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ de ses distances à A et B soit constant.

— Étant donné un triangle ABC, mener par A une droite AD, telle que, en abaissant des points A et B des perpendiculaires BB′ et CC′ sur cette droite, on ait $\mathrm{BB'}^2 + \mathrm{CC'}^2 = m^2$; quelle est la condition pour que le problème soit possible?

— On élève à l'une des extrémités B d'un diamètre AB

d'un cercle une perpendiculaire. Déterminer sur cette perpendiculaire un point C tel que, en le joignant à l'autre extrémité du diamètre, la portion CD située en dehors du cercle ait une longueur donnée a.

— Un triangle équilatéral ABC, dont le côté est a, tourne autour de l'axe Ax, mené dans son plan par le sommet A perpendiculairement au côté AB. Exprimer au moyen de a le volume décrit par la rotation du triangle.

CAEN

— Calculer l'heure moyenne à laquelle se couchera, le 22 avril, une étoile dont la déclinaison est nulle, et dont l'ascension droite est égale à $68^\circ\ 36'\ 45''$, sachant que, le même jour, à midi moyen, l'heure sidérale est $2^h\ 4^m\ 17^s$, et que la différence entre le jour sidéral et le jour moyen est de 236 secondes de temps moyen.

— Quelles valeurs faut-il donner à p et q pour que les racines de l'équation du second degré $x^2 + px + q = 0$ soient précisément égales à p et à q?

— Résoudre un triangle connaissant un côté, le périmètre, et le rayon du cercle circonscrit.

BORDEAUX

Session de juillet. — Composition unique.

— Étant données une circonférence de rayon R, et une tangente AT à cette circonférence, mener un rayon OM faisant avec OA un angle α tel que la somme des distances du point M au point A et à la droite AT soit égale à m fois le rayon R. On déterminera les limites entre lesquelles m doit être compris pour que le problème soit possible.

— Trouver l'angle x qui satisfait à l'équation

$$\sin 7x - \sin x = \sin 3x.$$

— Vérification des lois de la réflexion de la chaleur : 1° par les miroirs conjugués; 2° par l'emploi du thermo-multiplicateur.

— Propriétés et préparation du cyanogène. Calculer le volume d'oxygène mesuré à 0°, et sous la pression de 760 nécessaire pour brûler complètement le gaz formé par la décomposition de 125 gr. de cyanure de mercure. Équivalents : carbone, 6; azote 14; oxygène 8; mercure 100.

Session de Novembre. — Composition unique.

— Dans un triangle isoscèle ABC, mener une parallèle xy à la base, telle que la figure tournant autour de xy, le volume engendré par le triangle Axy soit équivalent au volume engendré par le trapèze $xyCB$.

— Trouver deux nombres tels que leur produit soit 15, et que leur somme ajoutée à la somme de leurs carrés soit égale à 42.

— Un corps dont la densité égale 6,5 pèse 140 gr. dans l'eau; calculer son poids dans l'air.

— Phénomènes offerts par un rayon de lumière blanche dans son passage à travers un prisme.

— Préparation et propriétés de l'ammoniaque.

GRENOBLE

— On donne une circonférence, et un point B situé sur le rayon OA, à une distance x de O; par le point B, on mène la corde CD perpendiculaire à OA, et on mène les tangentes en C et D, qui se rencontrent sur OA en E. Sur BE comme diamètre, on décrit une circonférence O', qui coupe la première en E et F; on mène OE, O'E, OF, O'F; démontrer que les angles OEO', OFO' sont droits. Calculer la longueur de la corde commune EF; déterminer x de façon que la surface du quadrilatère OEO'F soit égale à la surface du triangle CDE.

— L'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à l'unité; calculer les côtés, sachant que le volume engendré par le triangle en tournant autour de l'hypoténuse, est dans un rapport donné m avec la somme des surfaces engendrées par les deux côtés de l'angle droit. — Discussion.

POITIERS

Une droite Ox fait des angles α et β avec deux droites fixes OA, OB; on prend OB $= d$, et on demande de déterminer sur Ox, par sa distance au point O, un point M tel que le rapport $\frac{MB}{MP}$ de ses distances au point B et à la droite OA soit égal à un nombre donné k: discussion lorsque OA change de direction.

— L'observatoire de Turin et le clocher du lycée de Tournon ont pour latitude commune $45°4'2''$, et pour longitudes respectives $5°21'25''$ et $2°29'56''$, toutes les deux à l'est. La terre est supposée sphérique; la circonférence d'un grand cercle vaut 40000 kilomètres; on demande d'évaluer en mètres : la longueur de l'arc de parallèle compris entre les deux points ci-dessus; la longueur de la corde de cet arc; la longueur de l'arc du grand centre ayant même corde.

MONTPELLIER

— Dans un quadrilatère ABCD, les angles B et D sont droits; on connaît la diagonale AC $= a$, le périmètre $2p$, et la surface S. Déterminer les côtés AB $= x$, BC $= y$, CD $= x'$, DA $= y'$. On pourra poser $x + y = p + u$, u étant une inconnue auxiliaire.

TOULOUSE

Session de juillet, composition unique.

— Étant donné un triangle ABC, que l'on fait tourner autour d'un de ses côtés AB de façon qu'il effectue une révolution complète, on demande d'évaluer, en fonction du côté AB et des angles adjacents A et B : 1° la somme des surfaces engendrées par les côtés AC et BC; 2° le volume engendré par la surface du triangle ABC. — Étant données la base AB et la somme des angles A et B, pour quelle valeur de ces angles le volume précédent sera-t-il le plus grand possible?

— Décrire le microscope composé. Expliquer la formation des images. Dire comment on emploie ce microscope pour l'examen des objets transparents.

— On demande d'exprimer en degrés centigrades la température d'un four au moyen de l'expérience suivante : un morceau de cuivre pesant 50 grammes est chauffé dans le four; on le plonge rapidement dans un calorimètre à glace; il y fond 30 centimètres cubes d'eau. La chaleur spécifique du cuivre est 0,095; la chaleur latente de fusion de la glace est 80.

Session de Novembre. Composition unique.

— Démontrer que si une fraction $\frac{a}{b}$ est équivalente à une fraction irréductible $\frac{\alpha}{\beta}$, a et b sont des équimultiples de α et β.

— Partager un arc de cercle donné en deux parties telles que la somme des cordes sous-tendues par ces arcs ait une valeur donnée. Maximum ou minimum de cette somme. Même question pour la différence des deux cordes, pour leur produit et pour la somme de leurs carrés.

— Balance de précision. Description. Conditions de sensibilité. Usages.

— Un miroir concave a deux mètres de rayon. Un objet rectiligne, dont la longueur est $0^{m},50$ est placé sur l'axe à une distance du miroir égale à 3 mètres et perpendiculaire à l'axe. On demande la position et la grandeur de l'image.

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Questions résolues

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS